NIZOVI REALNIH BROJEVA

- Realni nizovi

NIZOVI REALNIH BROJEVA

- Realni nizovi
- Monotoni nizovi

NIZOVI REALNIH BROJEVA

- Realni nizovi
- Monotoni nizovi
- Broj e

NIZOVI REALNIH BROJEVA

- Realni nizovi
- Monotoni nizovi
- Broj e
- Podnizovi

NIZOVI REALNIH BROJEVA

- Realni nizovi
- Monotoni nizovi
- Broj e
- Podnizovi
- Bolzano- Weierstrassov stav

REALNI NIZOVI

Govoreći o prebrojivim skupovima, pomenuli smo da se njihovi elementi mogu urediti u niz. Tako dobijamo

- Niz (svih) prirodnih brojeva

REALNI NIZOVI

Govoreći o prebrojivim skupovima, pomenuli smo da se njihovi elementi mogu urediti u niz. Tako dobijamo

- Niz (svih) prirodnih brojeva
- Niz (svih) racionalnih brojeva

REALNI NIZOVI

Govoreći o prebrojivim skupovima, pomenuli smo da se njihovi elementi mogu urediti u niz. Tako dobijamo

- Niz (svih) prirodnih brojeva
- Niz (svih) racionalnih brojeva
- Niz (svih) celih brojeva

REALNI NIZOVI

Govoreći o prebrojivim skupovima, pomenuli smo da se njihovi elementi mogu urediti u niz. Tako dobijamo

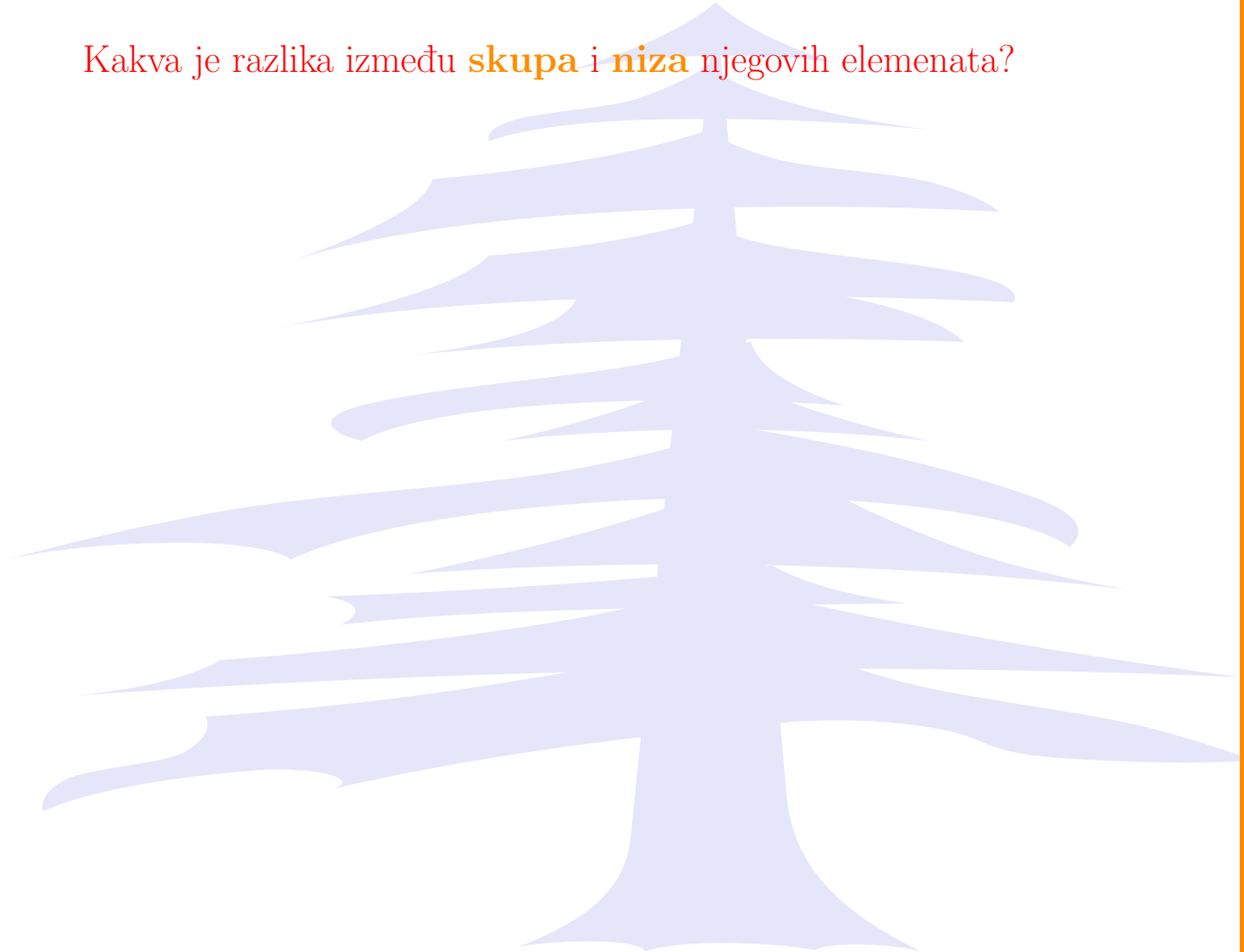
- Niz (svih) prirodnih brojeva
- Niz (svih) racionalnih brojeva
- Niz (svih) celih brojeva
- Niz (svih) parnih brojeva

REALNI NIZOVI

Govoreći o prebrojivim skupovima, pomenuli smo da se njihovi elementi mogu urediti u niz. Tako dobijamo

- Niz (svih) prirodnih brojeva
- Niz (svih) racionalnih brojeva
- Niz (svih) celih brojeva
- Niz (svih) parnih brojeva
- ...

Kakva je razlika između **skupa** i **niza** njegovih elemenata?



Kakva je razlika između **skupa** i **niza** njegovih elemenata?

U nizu je definisan poredak, tj. zna se koji je prvi, drugi, treći . . . član niza, dok u skupu poredak nije definisan

Kakva je razlika između **skupa** i **niza** njegovih elemenata?

U nizu je definisan poredak, tj. zna se koji je prvi, drugi, treći . . . član niza, dok u skupu poredak nije definisan

Na taj način, uspostavljeno je preslikavanje između skupa prirodnih brojeva i elemenata datog skupa.

Kakva je razlika između **skupa** i **niza** njegovih elemenata?

U nizu je definisan poredak, tj. zna se koji je prvi, drugi, treći . . . član niza, dok u skupu poredak nije definisan

Na taj način, uspostavljeno je preslikavanje između skupa prirodnih brojeva i elemenata datog skupa.

Prema tome, niz je funkcija čiji je domen skup prirodnih brojeva.

Definicija 1 Svako preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup $\mathbf{R}$ nazivamo **realnim nizom**. Broj koji se ovim preslikavanjem dodeljuje prirodnom broju n označava se sa x_n, a_n, itd i zove se **n-ti član niza** ili **n-ti element niza**; prirodan broj n je **indeks** člana x_n. Ako je specificirana zavisnost x_n od n, onda se x_n naziva **opštim članom niza**. Za niz $\{x_n\}$ čiji su članovi $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ koristi se oznaka $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ili samo $\{x_n\}$.

Niz može biti zadat pomoću formule. Na primer:

- Formulom $x_n = 2n - 1$ definisan je niz neparnih brojeva čiji su članovi $1, 3, 5, \ldots$. Oni se dobijaju kada se u formulu za x_n stavi da je, redom, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $\ldots$

Niz može biti zadat pomoću formule. Na primer:

- Formulom $x_n = 2n - 1$ definisan je niz neparnih brojeva čiji su članovi $1, 3, 5, \ldots$. Oni se dobijaju kada se u formulu za x_n stavi da je, redom, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $\ldots$
- Formulom $x_n = 5n + 3$ definisan je niz čiji su članovi $8, 13, 18, 23, \ldots$ To su prirodni brojevi koji daju ostatak 3 pri deljenju sa 5.

Niz može biti zadat pomoću formule. Na primer:

- Formulom $x_n = 2n - 1$ definisan je niz neparnih brojeva čiji su članovi $1, 3, 5, \ldots$. Oni se dobijaju kada se u formulu za x_n stavi da je, redom, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $\ldots$
- Formulom $x_n = 5n + 3$ definisan je niz čiji su članovi $8, 13, 18, 23, \ldots$ To su prirodni brojevi koji daju ostatak 3 pri deljenju sa 5.
- Formulom $x_n = (-1)^n$ definisan je jedan važan niz koga ćemo često koristiti. To je niz $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$. Sličnom formulom, $x_n = (-1)^{n-1}$, definisan je niz koji počinje sa 1: $1, -1, 1, -1, \ldots$

Niz može biti zadat pomoću formule. Na primer:

- Formulom $x_n = 2n - 1$ definisan je niz neparnih brojeva čiji su članovi $1, 3, 5, \ldots$. Oni se dobijaju kada se u formulu za x_n stavi da je, redom, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $\ldots$
- Formulom $x_n = 5n + 3$ definisan je niz čiji su članovi $8, 13, 18, 23, \ldots$ To su prirodni brojevi koji daju ostatak 3 pri deljenju sa 5.
- Formulom $x_n = (-1)^n$ definisan je jedan važan niz koga ćemo često koristiti. To je niz $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$. Sličnom formulom, $x_n = (-1)^{n-1}$, definisan je niz koji počinje sa 1: $1, -1, 1, -1, \ldots$
- Formulom $x_n = \cos\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ definisan je niz čiji su članovi, redom,

$$\cos\alpha, -\sin\alpha, -\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\alpha, \ldots$$

Primetimo da u ovom slučaju niz počinje od člana sa indeksom 0.

Niz može biti zadat i pomoću **rekurentne formule**. Na taj način se svaki sledeći član niza izračunava pomoću jednog ili više prethodnih članova. Na primer,

Niz može biti zadat i pomoću **rekurentne formule**. Na taj način se svaki sledeći član niza izračunava pomoću jednog ili više prethodnih članova. Na primer,

- Ako zadamo da je

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n^2 + 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dobijamo niz $0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 26,\ \ldots$

Niz može biti zadat i pomoću **rekurentne formule**. Na taj način se svaki sledeći član niza izračunava pomoću jednog ili više prethodnih članova. Na primer,

- Ako zadamo da je

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n^2 + 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dobijamo niz $0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 26,\ \ldots$

- Rekurentnom formulom

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

određen je niz čiji su članovi

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

Ovaj niz se zove FIBONACCIjev niz.

Rekurentne formule se jednostavno programiraju. Na primer, sledeći algoritam generiše niz čiji su članovi zadati rekurentnom formulom $x_1 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + 1$

Rekurentne formule se jednostavno programiraju. Na primer, sledeći algoritam generiše niz čiji su članovi zadati rekurentnom formulom $x_1 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + 1$

(1) $$x = x^2 + 1$$

Rekurentne formule se jednostavno programiraju. Na primer, sledeći algoritam generiše niz čiji su članovi zadati rekurentnom formulom $x_1 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + 1$

(1) $$x = x^2 + 1$$

(2) $$n = n + 1$$

Rekurentne formule se jednostavno programiraju. Na primer, sledeći algoritam generiše niz čiji su članovi zadati rekurentnom formulom $x_1 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + 1$

(1) $$x = x^2 + 1$$

(2) $$n = n + 1$$

(3) $$x,\ n$$

Rekurentne formule se jednostavno programiraju. Na primer, sledeći algoritam generiše niz čiji su članovi zadati rekurentnom formulom $x_1 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + 1$

(1) $x = x^2 + 1$

(2) $n = n + 1$

(3) $x,\ n$

(4) vrati se na (1)

Niz može biti zadat i opisno, bez formule. Na primer,

Niz može biti zadat i opisno, bez formule. Na primer,

- **Niz decimalnih cifara broja π, u redosledu pojavljivanja.** Nije moguće na'ci formuli za ovaj niz, ali se njegovi članovi mogu izračunati (kasnije će se videti kako!)

Niz može biti zadat i opisno, bez formule. Na primer,

- **Niz decimalnih cifara broja π, u redosledu pojavljivanja.** Nije moguće na'ci formuli za ovaj niz, ali se njegovi članovi mogu izračunati (kasnije će se videti kako!)
- **Niz prostih prirodnih brojeva.** Za ovaj niz nije nađena formula koja bi za dato n dala n-ti po redu prost broj. Međutim, za svaki dati broj, može se, sa više ili manje teškoće, odrediti da li jeste ili nije prost. Prvih nekoliko prostih brojeva su:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31, \ldots$$

Zna se da ih ima beskonačno mnogo, a do sada najveći nađen prost broj ima 6 miliona cifara.

Niz može biti zadat i opisno, bez formule. Na primer,

- **Niz decimalnih cifara broja π, u redosledu pojavljivanja.** Nije moguće na'ci formuli za ovaj niz, ali se njegovi članovi mogu izračunati (kasnije će se videti kako!)
- **Niz prostih prirodnih brojeva.** Za ovaj niz nije nađena formula koja bi za dato n dala n-ti po redu prost broj. Međutim, za svaki dati broj, može se, sa više ili manje teškoće, odrediti da li jeste ili nije prost. Prvih nekoliko prostih brojeva su:

  $$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ldots$$

  Zna se da ih ima beskonačno mnogo, a do sada najveći nađen prost broj ima 6 miliona cifara.
- **Niz racionalnih brojeva.** Kao što smo dokazali, raconalni brojevi se mogu urediti u niz. Postoji beskrajno mnogo načina da se to uradi, pa ovaj niz nije u potpunosti određen, ali nam to uglavnom nije bitno.

U matematičkoj analizi interesuje nas ponašanje članova niza kada im indeks neograničeno raste.

U matematičkoj analizi interesuje nas ponašanje članova niza kada im indeks neograničeno raste.

Ideja je da se proučava „gomilanje” članova niza oko neke vrednosti. Na primer,

U matematičkoj analizi interesuje nas ponašanje članova niza kada im indeks neograničeno raste.

Ideja je da se proučava „gomilanje" članova niza oko neke vrednosti. Na primer,

- Članovi nizova $\{\frac{1}{n}\}$ ili $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ „gomilaju se" oko nule, odnosno sve su bliži nuli ukoliko je n veće.

U matematičkoj analizi interesuje nas ponašanje članova niza kada im indeks neograničeno raste.

Ideja je da se proučava „gomilanje" članova niza oko neke vrednosti. Na primer,

- Članovi nizova $\{\frac{1}{n}\}$ ili $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ „gomilaju se" oko nule, odnosno sve su bliži nuli ukoliko je n veće.
- Članovi niza čiji je opšti član $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ gomilaju se takođe oko nule, mada nije tačno da su sve bliži nuli kada se n povećava.

Kažemo da je realan broj a **granična vrednost** ili **limes** niza $\{x_n\}$ i pišemo $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ ili $x_n \to a$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{5}$$

Često ćemo umesto $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ pisati samo $\lim x_n$. Ako je $\lim x_n = a$, kažemo da niz $\{x_n\}$ **konvergira ka** a ili da **teži ka** a kad n teži ka beskonačnosti.

Ako postoji neko $a \in \mathbf{R}$ takvo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, kažemo da je niz **konvergentan**.

Primeri:

- $\lim \frac{1}{n} = 0;$

Primeri:

- $\lim \dfrac{1}{n} = 0;$
- $\lim \dfrac{2 + (-1)^n}{n} = 0;$

Primeri:

- $\lim \frac{1}{n} = 0;$
- $\lim \frac{2 + (-1)^n}{n} = 0;$
- $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0;$

Primeri:

- $\lim \frac{1}{n} = 0;$
- $\lim \frac{2 + (-1)^n}{n} = 0;$
- $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0;$
- $\lim 2^{1/n} = 1.$

Primeri:

- $\lim \frac{1}{n} = 0;$
- $\lim \frac{2 + (-1)^n}{n} = 0;$
- $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0;$
- $\lim 2^{1/n} = 1.$

Za sada, jedini način da utvrdimo da je niz konvergentan je sledeći:

- Nađe se prvih nekoliko članova niza i "nasluti se" a;

Primeri:

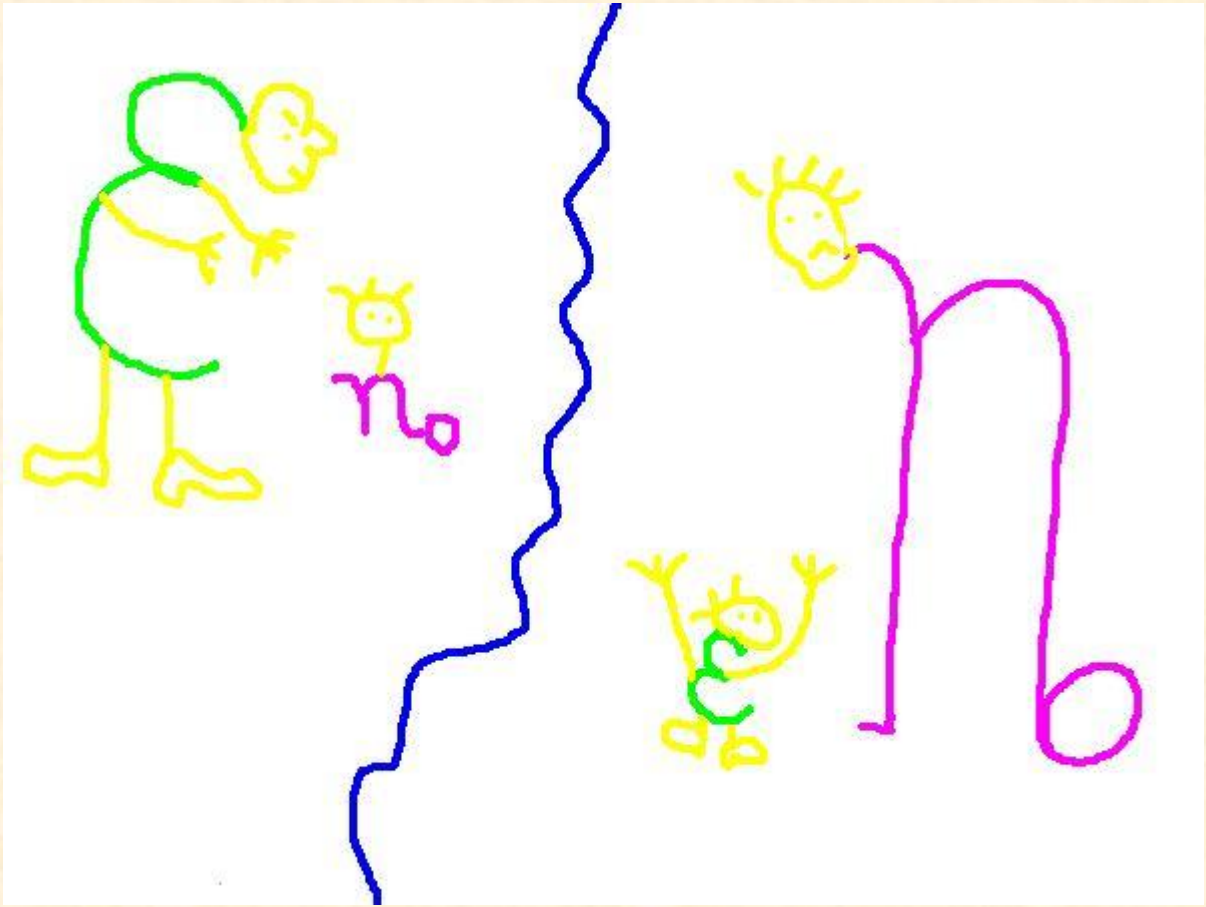
- $\lim \dfrac{1}{n} = 0;$
- $\lim \dfrac{2 + (-1)^n}{n} = 0;$
- $\lim \dfrac{(-1)^n}{n} = 0;$
- $\lim 2^{1/n} = 1.$

Za sada, jedini način da utvrdimo da je niz konvergentan je sledeći:

- Nađe se prvih nekoliko članova niza i "nasluti se" a;
- Zatim se striktno dokaže da je $\lim x_n = a$.

Za veliko ε dovoljno je malo n_0, dok malo ε traži veliko n_0:

Za veliko ε dovoljno je malo n_0, dok malo ε traži veliko n_0:



Kako je pojam limesa u vezi sa ponašanjem članova niza sa **velikim indeksima**, na konvergenciju ne utiču početni članovi niza. To znači da se konačno mnogo prvih članova niza može izmeniti bez uticaja na njegovu konvergenciju.

Kako je pojam limesa u vezi sa ponašanjem članova niza sa **velikim indeksima**, na konvergenciju ne utiču početni članovi niza. To znači da se konačno mnogo prvih članova niza može izmeniti bez uticaja na njegovu konvergenciju.

Zaključak:

Kako je pojam limesa u vezi sa ponašanjem članova niza sa **velikim indeksima**, na konvergenciju ne utiču početni članovi niza. To znači da se konačno mnogo prvih članova niza može izmeniti bez uticaja na njegovu konvergenciju.

Zaključak:

- **Malo** ε

Kako je pojam limesa u vezi sa ponašanjem članova niza sa **velikim indeksima**, na konvergenciju ne utiču početni članovi niza. To znači da se konačno mnogo prvih članova niza može izmeniti bez uticaja na njegovu konvergenciju.

Zaključak:

- **Malo** ε
- **Veliko** n_0

Kako je pojam limesa u vezi sa ponašanjem članova niza sa **velikim indeksima**, na konvergenciju ne utiču početni članovi niza. To znači da se konačno mnogo prvih članova niza može izmeniti bez uticaja na njegovu konvergenciju.

Zaključak:

- **Malo** ε
- **Veliko** n_0
- **Početni članovi nisu bitni**

Kako je pojam limesa u vezi sa ponašanjem članova niza sa **velikim indeksima**, na konvergenciju ne utiču početni članovi niza. To znači da se konačno mnogo prvih članova niza može izmeniti bez uticaja na njegovu konvergenciju.

Zaključak:

- **Malo** ε
- **Veliko** n_0
- **Početni članovi nisu bitni**

Ekvivalentni oblici definicije: $\lim x_n = a$ ako i samo ako važi:

Ekvivalentni oblici definicije: $\lim x_n = a$ ako i samo ako važi:

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Ekvivalentni oblici definicije: $\lim x_n = a$ ako i samo ako važi:

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}) \quad n \geq n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon$

Ekvivalentni oblici definicije: $\lim x_n = a$ ako i samo ako važi:

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}) \quad n \geq n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Ekvivalentni oblici definicije: $\lim x_n = a$ ako i samo ako važi:

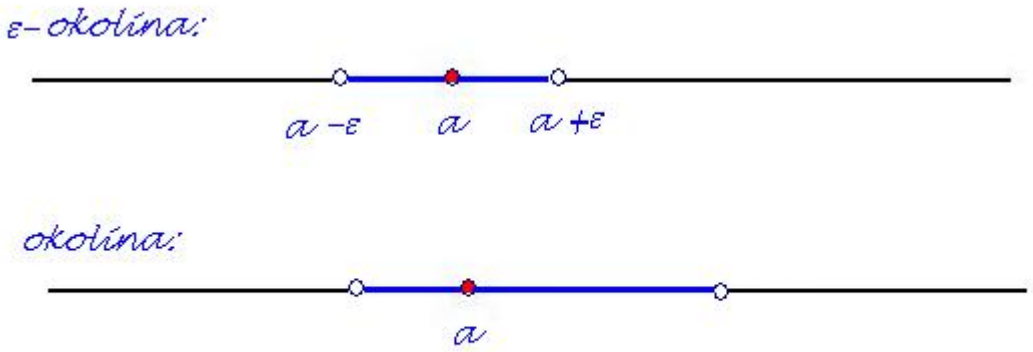
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}) \quad n \geq n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| \leq \varepsilon$

Ekvivalentni oblici definicije: $\lim x_n = a$ ako i samo ako važi:

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}) \quad n \geq n_0 \implies |x_n - a| < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n > n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| \leq \varepsilon$
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists y_0 \in \mathbf{R})(\forall n \geq y_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Definicija 2 Otvoreni interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ dužine 2ε sa centrom u tački $a \in \mathbf{R}$ nazivamo **ε-okolinom** tačke a. Pod pojmom **okolina** tačke a podrazumevamo svaki otvoreni interval koji sadrži tačku a.

Definicija 2 Otvoreni interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ dužine 2ε sa centrom u tački $a \in \mathbf{R}$ nazivamo **ε-okolinom** tačke a. Pod pojmom **okolina** tačke a podrazumevamo svaki otvoreni interval koji sadrži tačku a.



Definicija 3 Kažemo da **skoro svi članovi niza** imaju neku osobinu P ako postoji n_0 tako da svako x_n za $n \geq n_0$ ima osobinu P.

Definicija 3 Kažemo da **skoro svi članovi niza** imaju neku osobinu P ako postoji n_0 tako da svako x_n za $n \geq n_0$ ima osobinu P.

Drugim rečima, skoro svi članovi niza imaju osobinu P ako je imaju svi članovi niza počevši od nekog indeksa, ili, što je isto, ako tu osobinu imaju svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

Definicija 3 Kažemo da **skoro svi članovi niza** imaju neku osobinu P ako postoji n_0 tako da svako x_n za $n \geq n_0$ ima osobinu P.

Drugim rečima, skoro svi članovi niza imaju osobinu P ako je imaju svi članovi niza počevši od nekog indeksa, ili, što je isto, ako tu osobinu imaju svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

Uvedeni termin ćemo koristiti i u kontekstu kao što je „skoro svi prirodni brojevi", „skoro svaki indeks niza" i sl.

Definicija 4 Ekvivalentna definicija konvergencije niza.
Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Definicija 4 Ekvivalentna definicija konvergencije niza.
Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Niz $\{(-1)^n\}$ nema limes.

Definicija 4 Ekvivalentna definicija konvergencije niza.
Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Niz $\{(-1)^n\}$ nema limes.
Dokaz:

Definicija 4 Ekvivalentna definicija konvergencije niza.
Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Niz $\{(-1)^n\}$ nema limes.
Dokaz:

- Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lim(-1)^n = a$.

Definicija 4 Ekvivalentna definicija konvergencije niza.
Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Niz $\{(-1)^n\}$ nema limes.
Dokaz:

- Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lim(-1)^n = a$.
- Onda bi svaka okolina tačke a morala da sadrži brojeve -1 i 1.

Definicija 4 Ekvivalentna definicija konvergencije niza.
Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Niz $\{(-1)^n\}$ nema limes.
Dokaz:

- Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lim(-1)^n = a$.
- Onda bi svaka okolina tačke a morala da sadrži brojeve -1 i 1.
- To je nemoguće (apsurd)

Definicija 4 Ekvivalentna definicija konvergencije niza.
Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Niz $\{(-1)^n\}$ nema limes.
Dokaz:

- Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lim(-1)^n = a$.
- Onda bi svaka okolina tačke a morala da sadrži brojeve -1 i 1.
- To je nemoguće (apsurd)
- Dakle, polazna pretpostavka nije tačna, pa takvo a ne postoji, odnosno niz nije konvergentan.

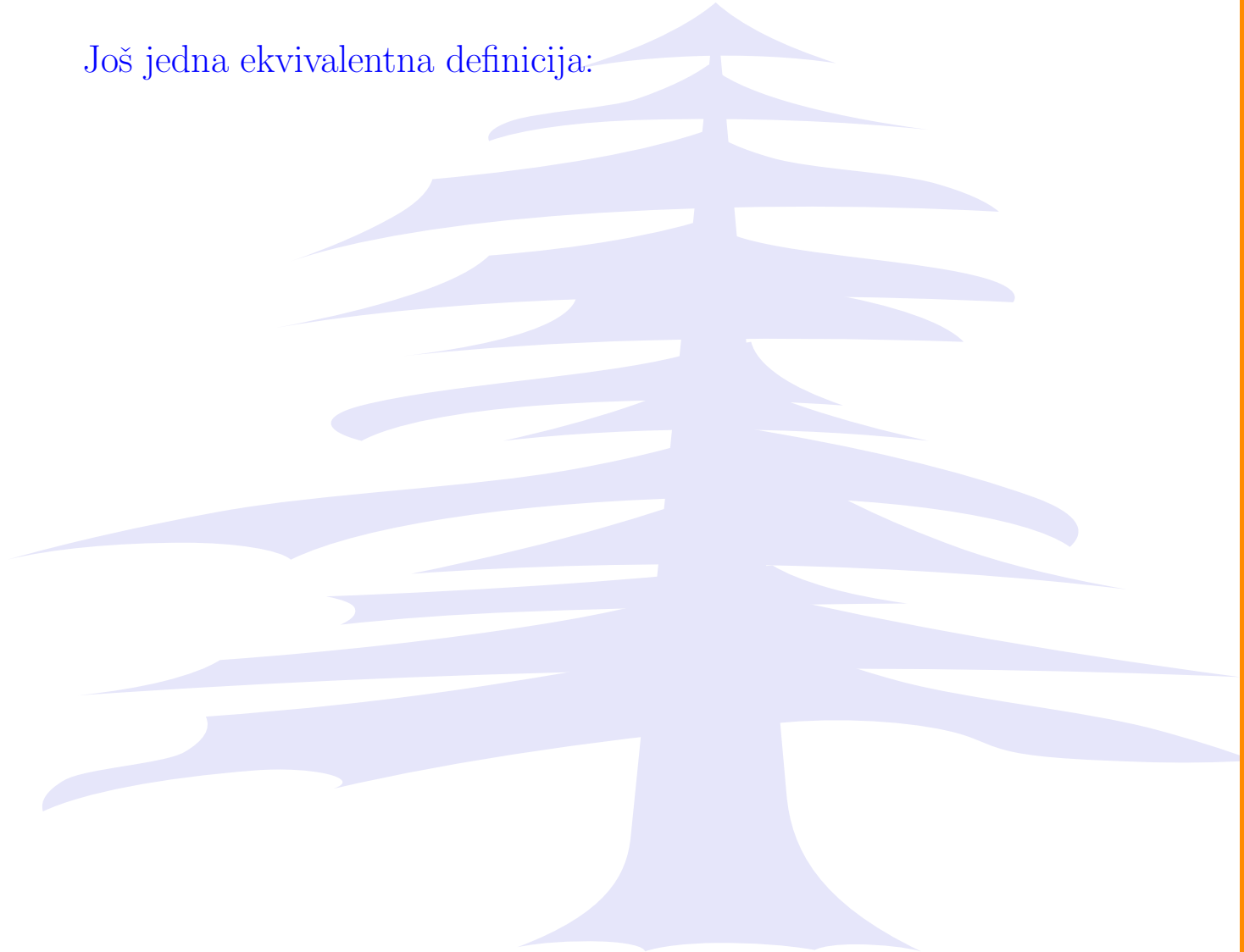
Definicija 4 Ekvivalentna definicija konvergencije niza.
Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Niz $\{(-1)^n\}$ nema limes.
Dokaz:

- Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lim(-1)^n = a$.
- Onda bi svaka okolina tačke a morala da sadrži brojeve -1 i 1.
- To je nemoguće (apsurd)
- Dakle, polazna pretpostavka nije tačna, pa takvo a ne postoji, odnosno niz nije konvergentan.

U izvedenom dokazu primenili smo metod **svođenja na apsurd (reductio ad absurdum)**. Apsurd je postignut kada se pokaže da važi neko tvrđenje a takođe i njegova negacija.

Još jedna ekvivalentna definicija:



Još jedna ekvivalentna definicija:

Teorema 1 *Niz* $\{x_n\}$ *konvergira ka* a *ako i samo ako*

$$(\exists C \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < C\varepsilon. \tag{6}$$

Još jedna ekvivalentna definicija:

Teorema 1 *Niz* $\{x_n\}$ *konvergira ka* a *ako i samo ako*

$$(\exists C \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < C\varepsilon. \tag{6}$$

Dokaz:

Još jedna ekvivalentna definicija:

Teorema 1 *Niz* $\{x_n\}$ *konvergira ka* a *ako i samo ako*

$$(\exists C \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < C\varepsilon. \tag{6}$$

Dokaz:

- Prvi deo: Ako je $\lim x_n = a$, onda važi (6).

Još jedna ekvivalentna definicija:

Teorema 1 *Niz* $\{x_n\}$ *konvergira ka* a *ako i samo ako*

$$(\exists C \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < C\varepsilon. \tag{6}$$

Dokaz:

- Prvi deo: Ako je $\lim x_n = a$, onda važi (6).
- Drugi deo: Ako važi (6), onda je $\lim x_n = a$.

Još jedna ekvivalentna definicija:

Teorema 1 *Niz* $\{x_n\}$ *konvergira ka* a *ako i samo ako*

$$(\exists C \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < C\varepsilon. \tag{6}$$

Dokaz:

- Prvi deo: Ako je $\lim x_n = a$, onda važi (6).
- Drugi deo: Ako važi (6), onda je $\lim x_n = a$.

Osobine konvergentnih nizova

Teorema 1 *Niz ne može imati više od jedne granične vrednosti.*

Osobine konvergentnih nizova

Teorema 1 *Niz ne može imati više od jedne granične vrednosti.*

Dokaz metodom svođenja na apsurd.

Osobine konvergentnih nizova

Teorema 1 *Niz ne može imati više od jedne granične vrednosti.*

Dokaz metodom svođenja na apsurd.

Tek ova osobina nam daje za pravo da pišemo jednakost: $\lim x_n = a$.

Posmatrajmo sledeću definiciju pojma koji ćemo zvati dimes:

Posmatrajmo sledeću definiciju pojma koji ćemo zvati dimes:

Definicija: Kažemo da je **dimes** niza x_n jednak a ako se u svakoj okolini broja a nalazi beskonačno mnogo članova niza. U tom slučaju pišemo $\operatorname{dim} x_n = a$.

Posmatrajmo sledeću definiciju pojma koji ćemo zvati dimes:

Definicija: Kažemo da je **dimes** niza x_n jednak a ako se u svakoj okolini broja a nalazi beskonačno mnogo članova niza. U tom slučaju pišemo $\operatorname{dim} x_n = a$.

Ova definicija nije dobra jer za isti niz x_n može postojati više različitih brojeva $a, b, c, \ldots$ koji ispunjavaju uslov iz definicije (primer?)

Posmatrajmo sledeću definiciju pojma koji ćemo zvati dimes:

Definicija: Kažemo da je **dimes** niza x_n jednak a ako se u svakoj okolini broja a nalazi beskonačno mnogo članova niza. U tom slučaju pišemo $\dim x_n = a$.

Ova definicija nije dobra jer za isti niz x_n može postojati više različitih brojeva $a, b, c, \ldots$ koji ispunjavaju uslov iz definicije (primer?)

Stoga oznaka koja se u definiciji uvodi nema smisla, jer dovodi do mogućnosti da je $\dim x_n = a$ i $\dim x_n = b$ za $a \neq b$.

Posmatrajmo sledeću definiciju pojma koji ćemo zvati dimes:

Definicija: Kažemo da je **dimes** niza x_n jednak a ako se u svakoj okolini broja a nalazi beskonačno mnogo članova niza. U tom slučaju pišemo $\dim x_n = a$.

Ova definicija nije dobra jer za isti niz x_n može postojati više različitih brojeva $a, b, c, \ldots$ koji ispunjavaju uslov iz definicije (primer?)

Stoga oznaka koja se u definiciji uvodi nema smisla, jer dovodi do mogućnosti da je $\dim x_n = a$ i $\dim x_n = b$ za $a \neq b$.

Pojam "dimesa" je ipak koristan, i uvešćemo ga kasnije pod drugim imenom.

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

- Neka je x_n jedan konvergentan niz i neka je $\lim x_n = a$.

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

- Neka je x_n jedan konvergentan niz i neka je $\lim x_n = a$.
- U svakoj ε-okolini broja a nalaze se skoro svi članovi tog niza.

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

- Neka je x_n jedan konvergentan niz i neka je $\lim x_n = a$.
- U svakoj ε-okolini broja a nalaze se skoro svi članovi tog niza.
- Uzmimo da je $\varepsilon = 1$ (može i bilo koji drugi broj).

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

- Neka je x_n jedan konvergentan niz i neka je $\lim x_n = a$.
- U svakoj ε-okolini broja a nalaze se skoro svi članovi tog niza.
- Uzmimo da je $\varepsilon = 1$ (može i bilo koji drugi broj).
- To znači da se van intervala $(a-1, a+1)$ nalazi samo konačno mnogo

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

- Neka je x_n jedan konvergentan niz i neka je $\lim x_n = a$.
- U svakoj ε-okolini broja a nalaze se skoro svi članovi tog niza.
- Uzmimo da je $\varepsilon = 1$ (može i bilo koji drugi broj).
- To znači da se van intervala $(a-1, a+1)$ nalazi samo konačno mnogo članova niza. Neka je m_1 najmanji, a M_1 najveći od njih.

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

- Neka je x_n jedan konvergentan niz i neka je $\lim x_n = a$.
- U svakoj ε-okolini broja a nalaze se skoro svi članovi tog niza.
- Uzmimo da je $\varepsilon = 1$ (može i bilo koji drugi broj).
- To znači da se van intervala $(a-1, a+1)$ nalazi samo konačno mnogo članova niza. Neka je m_1 najmanji, a M_1 najveći od njih.
- Neka je $m = \min(a-1, m_1)$ i $M = \max(a+1, M_1)$.

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

- Neka je x_n jedan konvergentan niz i neka je $\lim x_n = a$.
- U svakoj ε-okolini broja a nalaze se skoro svi članovi tog niza.
- Uzmimo da je $\varepsilon = 1$ (može i bilo koji drugi broj).
- To znači da se van intervala $(a-1, a+1)$ nalazi samo konačno mnogo članova niza. Neka je m_1 najmanji, a M_1 najveći od njih.
- Neka je $m = \min(a-1, m_1)$ i $M = \max(a+1, M_1)$.
- Za sve članove niza važi da je $m \leq x_n \leq M$.

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

- Neka je x_n jedan konvergentan niz i neka je $\lim x_n = a$.
- U svakoj ε-okolini broja a nalaze se skoro svi članovi tog niza.
- Uzmimo da je $\varepsilon = 1$ (može i bilo koji drugi broj).
- To znači da se van intervala $(a-1, a+1)$ nalazi samo konačno mnogo članova niza. Neka je m_1 najmanji, a M_1 najveći od njih.
- Neka je $m = \min(a-1, m_1)$ i $M = \max(a+1, M_1)$.
- Za sve članove niza važi da je $m \leq x_n \leq M$.
- Prema tome, niz je ograničen

Teorema 2 *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz:

- Neka je x_n jedan konvergentan niz i neka je $\lim x_n = a$.
- U svakoj ε-okolini broja a nalaze se skoro svi članovi tog niza.
- Uzmimo da je $\varepsilon = 1$ (može i bilo koji drugi broj).
- To znači da se van intervala $(a-1, a+1)$ nalazi samo konačno mnogo članova niza. Neka je m_1 najmanji, a M_1 najveći od njih.
- Neka je $m = \min(a-1, m_1)$ i $M = \max(a+1, M_1)$.
- Za sve članove niza važi da je $m \leq x_n \leq M$.
- Prema tome, niz je ograničen

Ovo je metod **direktnog dokaza**: Da bismo dokazali tvrđenje oblika $A \implies B$, pretpostavimo da važi A i onda u nizu logički zasnovanih koraka dolazimo do zaključka da važi B.

Važno: Niz koji je samo ograničen ne mora biti konvergentan

Važno: Niz koji je samo ograničen ne mora biti konvergentan

Dokaz: Na primer, niz $x_n = (-1)^n$ je ograničen, ali nije konvergentan.

Važno: Niz koji je samo ograničen ne mora biti konvergentan

Dokaz: Na primer, niz $x_n = (-1)^n$ je ograničen, ali nije konvergentan.

Ovakav **dokaz navođenjem kontraprimera** često se primenjuje kada treba dokazati da neko tvrđenje nije tačno u opštem slučaju. Tada je dovoljno naći jedan poseban slučaj u kome tvrđenje ne važi (tzv. kontraprimer za posmatrano tvrđenje).

Kako se prolazi limesom kroz računske operacije?

Kako se prolazi limesom kroz računske operacije?

Teorema 3 (i) *Ako je* $x_n = c \in \mathbf{R}$ *za skoro svako* n, *tada je* $\lim x_n = c$.

(ii) *Neka je* $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ $(x, y \in \mathbf{R})$ *i neka su* a, b, c *proizvoljni realni brojevi. Tada važi:*

$$\lim (ax_n + by_n) = ax + by, \quad \lim (x_n + c) = x + c,$$

$$\lim x_n y_n = xy; \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \text{ ako } y \neq 0 \text{ i } y_n \neq 0 \text{ za } n \in \mathbf{N}.$$

Kako se prolazi limesom kroz računske operacije?

Teorema 3 (i) *Ako je* $x_n = c \in \mathbf{R}$ *za skoro svako* n, *tada je* $\lim x_n = c$.

(ii) *Neka je* $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ $(x, y \in \mathbf{R})$ *i neka su* a, b, c *proizvoljni realni brojevi. Tada važi:*

$$\lim (ax_n + by_n) = ax + by, \quad \lim (x_n + c) = x + c,$$

$$\lim x_n y_n = xy; \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \text{ ako } y \neq 0 \text{ i } y_n \neq 0 \text{ za } n \in \mathbf{N}.$$

Dokaz za (i): jednostavan.

Kako se prolazi limesom kroz računske operacije?

Teorema 3 (i) *Ako je* $x_n = c \in \mathbf{R}$ *za skoro svako* n, *tada je* $\lim x_n = c$.
(ii) *Neka je* $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ $(x, y \in \mathbf{R})$ *i neka su* a, b, c *proizvoljni realni brojevi. Tada važi:*

$$\lim (ax_n + by_n) = ax + by, \quad \lim (x_n + c) = x + c,$$

$$\lim x_n y_n = xy; \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \text{ ako } y \neq 0 \text{ i } y_n \neq 0 \text{ za } n \in \mathbf{N}.$$

Dokaz za (i): jednostavan.
Dokaz za (ii) je zasnovan na primeni nejednakosti trougla.

Tvrđenje:

$$\lim x_n = a \wedge \lim y_n = b \implies \lim (ax_n + by_n) = ax + by.$$

Tvrđenje:

$$\lim x_n = a \wedge \lim y_n = b \implies \lim (ax_n + by_n) = ax + by.$$

Dokaz:

Tvrđenje:

$$\lim x_n = a \wedge \lim y_n = b \implies \lim (ax_n + by_n) = ax + by.$$

Dokaz:
Ako je $|x_n - x| \leq \varepsilon$ i $|y_n - y| \leq \varepsilon$, onda je

$$\begin{aligned} |ax_n + by_n - (ax + by)| &= |(ax_n - ax) + (by_n - by)| \\ &\leq |a| \cdot |x_n - x| + |b| \cdot |y_n - y| \\ &\leq (|a| + |b|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Niz se zove **nula niz** ako konvergira ka nuli.

Niz se zove **nula niz** ako konvergira ka nuli.

Teorema 4 *Niz* $\{x_n\}$ *konvergira ka* $a \in \mathbf{R}$ *ako i samo ako je niz* $\{x_n - a\}$ *nula niz.*

Teorema 5 *Neka je* $\{x_n\}$ *nula-niz i neka je* $\{y_n\}$ *proizvoljan ograničen niz (koji ne mora biti konvergentan). Definišimo* $z_n = x_n y_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Tada je* $\{z_n\}$ *nula-niz.*

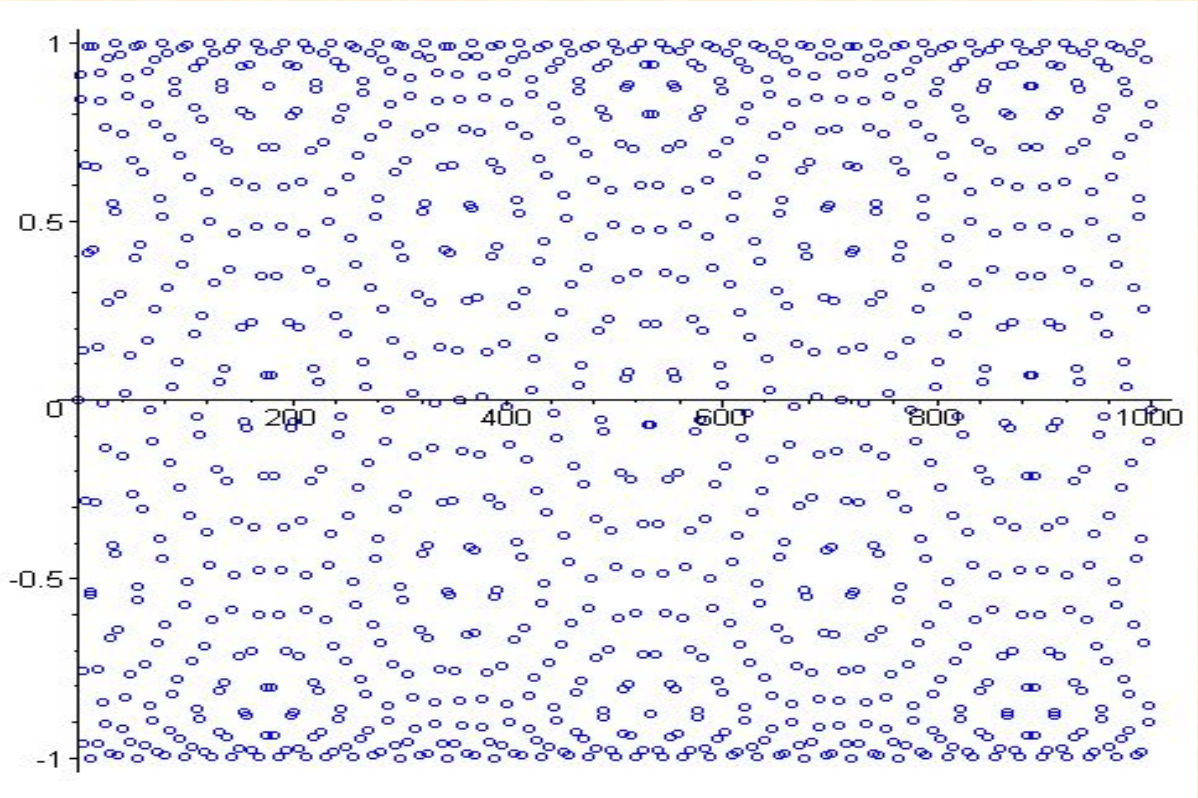
Teorema 5 *Neka je* $\{x_n\}$ *nula-niz i neka je* $\{y_n\}$ *proizvoljan ograničen niz (koji ne mora biti konvergentan). Definišimo* $z_n = x_n y_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Tada je* $\{z_n\}$ *nula-niz.*

Primer: Neka je $z_n = \dfrac{\sin n}{n}$. Kako je $\{\sin n\}$ ograničen niz, a $\frac{1}{n}$ nula-niz, primenom teoreme 5 zaključujemo da je $\lim z_n = 0$.

Teorema 5 *Neka je* $\{x_n\}$ *nula-niz i neka je* $\{y_n\}$ *proizvoljan ograničen niz (koji ne mora biti konvergentan). Definišimo* $z_n = x_n y_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Tada je* $\{z_n\}$ *nula-niz.*

Primer: Neka je $z_n = \dfrac{\sin n}{n}$. Kako je $\{\sin n\}$ ograničen niz, a $\frac{1}{n}$ nula-niz, primenom teoreme 5 zaključujemo da je $\lim z_n = 0$.

Napomena: Niz $\sin n$ je samo ograničen, ali nije konvergentan. To se može " videti" iz sledeće slike (pravi dokaz je u zadatku 1232 u zbirci):



Prvih hiljadu članova niza $\sin n$.

Prolaz limesom kroz relaciju poretka:

Prolaz limesom kroz relaciju poretka:

Teorema 6 (i) *Ako je* $\lim x_n = a > p \ (< p)$, *tada je* $x_n > p \ (< p)$ *za skoro svako* n.

Prolaz limesom kroz relaciju poretka:

Teorema 6 (i) *Ako je* $\lim x_n = a > p \ (< p)$, *tada je* $x_n > p \ (< p)$ *za skoro svako* n.

(ii) *Ako je niz* $\{x_n\}$ *konvergentan i ako je* $x_n \geq p \ (\leq p)$ *za skoro svako* n, *onda je* $\lim x_n \geq p \ (\leq p)$

Prolaz limesom kroz relaciju poretka:

Teorema 6 (i) *Ako je* $\lim x_n = a > p$ $(< p)$, *tada je* $x_n > p$ $(< p)$ *za skoro svako* n.

(ii) *Ako je niz* $\{x_n\}$ *konvergentan i ako je* $x_n \geq p$ $(\leq p)$ *za skoro svako* n, *onda je* $\lim x_n \geq p$ $(\leq p)$

Pažnja: Ako je $x_n > p$ **za svako** n**, ne mora biti** $\lim x_n > p$**!**

Prolaz limesom kroz relaciju poretka:

Teorema 6 (i) *Ako je* $\lim x_n = a > p\ (< p)$, *tada je* $x_n > p\ (< p)$ *za skoro svako* n.

(ii) *Ako je niz* $\{x_n\}$ *konvergentan i ako je* $x_n \geq p\ (\leq p)$ *za skoro svako* n, *onda je* $\lim x_n \geq p\ (\leq p)$

Pažnja: Ako je $x_n > p$ **za svako** n**, ne mora biti** $\lim x_n > p$**!**

Primer: $x_n = 1/n > 0$, ali je $\lim x_n = 0$.

Teorema 7 *Ako svi članovi konvergentnog niza* $\{x_n\}$ *pripadaju segmentu* $[a, b]$, *tada i* $\lim x_n \in [a, b]$.

Teorema 7 *Ako svi članovi konvergentnog niza* $\{x_n\}$ *pripadaju segmentu* $[a, b]$, *tada i* $\lim x_n \in [a, b]$.

Dokaz: direktno iz prethodne teoreme

Beskonačne granične vrednosti

Sličnosti i razlike između nizova $x_n = n^2,\ y_n = n+\sin n,\ z_n = (-1)^n n+ n + \frac{1}{n}$:

Definicija 5 Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K, tj.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Definicija 5 Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K, tj.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $-\infty$, u oznaci $\lim x_n = -\infty$ ako su, za svako $K > 0$, skoro svi članovi niza manji od $-K$, odnosno

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K.$$

Definicija 5 Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K, tj.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $-\infty$, u oznaci $\lim x_n = -\infty$ ako su, za svako $K > 0$, skoro svi članovi niza manji od $-K$, odnosno

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K.$$

Definicija 5 Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K, tj.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $-\infty$, u oznaci $\lim x_n = -\infty$ ako su, za svako $K > 0$, skoro svi članovi niza manji od $-K$, odnosno

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K.$$

U ovim slučajevima kaže se i da je niz **određeno divergentan** ili da **divergira ka beskonačnosti**.

Definicija 5 Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K, tj.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $-\infty$, u oznaci $\lim x_n = -\infty$ ako su, za svako $K > 0$, skoro svi članovi niza manji od $-K$, odnosno

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K.$$

U ovim slučajevima kaže se i da je niz **određeno divergentan** ili da **divergira ka beskonačnosti**.

Primeri:

Definicija 5 Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K, tj.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $-\infty$, u oznaci $\lim x_n = -\infty$ ako su, za svako $K > 0$, skoro svi članovi niza manji od $-K$, odnosno

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K.$$

U ovim slučajevima kaže se i da je niz **određeno divergentan** ili da **divergira ka beskonačnosti**.

Primeri:

- $\lim n^2 = +\infty$;

Definicija 5 Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K, tj.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $-\infty$, u oznaci $\lim x_n = -\infty$ ako su, za svako $K > 0$, skoro svi članovi niza manji od $-K$, odnosno

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K.$$

U ovim slučajevima kaže se i da je niz **određeno divergentan** ili da **divergira ka beskonačnosti**.

Primeri:

- $\lim n^2 = +\infty$;
- $\lim n + \sin n = +\infty$;

Definicija 5 Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K, tj.

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $-\infty$, u oznaci $\lim x_n = -\infty$ ako su, za svako $K > 0$, skoro svi članovi niza manji od $-K$, odnosno

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K.$$

U ovim slučajevima kaže se i da je niz **određeno divergentan** ili da **divergira ka beskonačnosti**.

Primeri:

- $\lim n^2 = +\infty$;
- $\lim n + \sin n = +\infty$;
- Niz $(-1)^n n + n + \frac{1}{n}$ nema ni konačan ni beskonačan limes.

Okolina beskonačnosti: Pod okolinom tačke $+\infty$ podrazumevamo interval $(K, +\infty)$, a okolina tačke $-\infty$ je interval $(-\infty, -K)$, za proizvoljno $K \in \mathbf{R}$

Okolina beskonačnosti: Pod okolinom tačke $+\infty$ podrazumevamo interval $(K, +\infty)$, a okolina tačke $-\infty$ je interval $(-\infty, -K)$, za proizvoljno $K \in \mathbf{R}$

Sada možemo reći da niz konvergira ka $+\infty$ ako i samo ako se u svakoj okolini tačke $+\infty$ nalaze skoro svi članovi niza.

Okolina beskonačnosti: Pod okolinom tačke $+\infty$ podrazumevamo interval $(K, +\infty)$, a okolina tačke $-\infty$ je interval $(-\infty, -K)$, za proizvoljno $K \in \mathbf{R}$

Sada možemo reći da niz konvergira ka $+\infty$ ako i samo ako se u svakoj okolini tačke $+\infty$ nalaze skoro svi članovi niza.

Ova definicija je formalno ista kao i definicija konačnog limesa.

Svaki realni niz spada u jednu od tri kategorije:

Svaki realni niz spada u jednu od tri kategorije:

- Konvergira ka nekom realnom broju a (konvergentan niz),

Svaki realni niz spada u jednu od tri kategorije:

- Konvergira ka nekom realnom broju a (konvergentan niz),
- Konvergira ka $\pm\infty$ (određeno divergentan niz),

Svaki realni niz spada u jednu od tri kategorije:

- Konvergira ka nekom realnom broju a (konvergentan niz),
- Konvergira ka $\pm\infty$ (određeno divergentan niz),
- Nema ni konačnu ni beskonačnu graničnu vrednost (neodređeno divergentan niz).

Važan primer: Za koje vrednosti $q \in \mathbf{R}$ je konvergentan **geometrijski niz** $\{q^n\}$?

Važan primer: Za koje vrednosti $q \in \mathbf{R}$ je konvergentan **geometrijski niz** $\{q^n\}$?

Niz je konvergentan za $q \in (-1, 1]$, divergira ka $+\infty$ ako je $q > 1$ i neodređeno je divergentan za $q < -1$.

Teorema 8 *Ako je* $\lim x_n = x \in \mathbf{R}$ *i* $\lim y_n = +\infty$, *tada je*

$$\lim (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0), \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Teorema 8 *Ako je* $\lim x_n = x \in \mathbf{R}$ *i* $\lim y_n = +\infty$, *tada je*

$$\lim (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0), \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Ako je $\lim x_n = 0$ *i ako su skoro svi članovi niza* $\{x_n\}$ *pozitivni, tada je* $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

Teorema 8 *Ako je* $\lim x_n = x \in \mathbf{R}$ *i* $\lim y_n = +\infty$, *tada je*

$$\lim (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0), \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Ako je $\lim x_n = 0$ *i ako su skoro svi članovi niza* $\{x_n\}$ *pozitivni, tada je* $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

Ova teorema se često interpretira kao da važe jednakosti:

Teorema 8 *Ako je* $\lim x_n = x \in \mathbf{R}$ *i* $\lim y_n = +\infty$, *tada je*

$$\lim (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0), \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Ako je $\lim x_n = 0$ *i ako su skoro svi članovi niza* $\{x_n\}$ *pozitivni, tada je* $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

Ova teorema se često interpretira kao da važe jednakosti:

$$\infty + \infty = \infty;$$

Teorema 8 *Ako je* $\lim x_n = x \in \mathbf{R}$ *i* $\lim y_n = +\infty$, *tada je*

$$\lim (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0), \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Ako je $\lim x_n = 0$ *i ako su skoro svi članovi niza* $\{x_n\}$ *pozitivni, tada je* $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

Ova teorema se često interpretira kao da važe jednakosti:

$$\infty + \infty = \infty;$$

$$x \cdot \infty = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0);$$

Teorema 8 *Ako je* $\lim x_n = x \in \mathbf{R}$ *i* $\lim y_n = +\infty$, *tada je*

$$\lim (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0), \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Ako je $\lim x_n = 0$ *i ako su skoro svi članovi niza* $\{x_n\}$ *pozitivni, tada je* $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

Ova teorema se često interpretira kao da važe jednakosti:

$$\infty + \infty = \infty;$$

$$x \cdot \infty = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0);$$

$$\frac{0}{\infty} = 0;$$

Teorema 8 *Ako je* $\lim x_n = x \in \mathbf{R}$ *i* $\lim y_n = +\infty$, *tada je*

$$\lim (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0), \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Ako je $\lim x_n = 0$ *i ako su skoro svi članovi niza* $\{x_n\}$ *pozitivni, tada je* $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

Ova teorema se često interpretira kao da važe jednakosti:

$$\infty + \infty = \infty;$$

$$x \cdot \infty = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \ (x \neq 0);$$

$$\frac{0}{\infty} = 0;$$

$$\frac{1}{0_+} = +\infty.$$

Neodređeni su izrazi u kojima se pojavljuju dva niza koja imaju granične vrednosti, ali se granična vrednost izraza ne može unapred predvideti.

Neodređeni su izrazi u kojima se pojavljuju dva niza koja imaju granične vrednosti, ali se granična vrednost izraza ne može unapred predvideti.

Na primer, ako je $\lim x_n = +\infty$ i $\lim y_n = +\infty$, za niz $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ kaže se da je neodređenost tipa ∞/∞. To znači da $\lim z_n$ nije **unapred** određen, već moramo da znamo konkretne nizove. Nekoliko primera:

Neodređeni su izrazi u kojima se pojavljuju dva niza koja imaju granične vrednosti, ali se granična vrednost izraza ne može unapred predvideti.

Na primer, ako je $\lim x_n = +\infty$ i $\lim y_n = +\infty$, za niz $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ kaže se da je neodređenost tipa ∞/∞. To znači da $\lim z_n$ nije **unapred** određen, već moramo da znamo konkretne nizove. Nekoliko primera:

- Ako je $x_n = n^2$, $y_n = n$, onda je $\lim z_n = +\infty$;

Neodređeni su izrazi u kojima se pojavljuju dva niza koja imaju granične vrednosti, ali se granična vrednost izraza ne može unapred predvideti.

Na primer, ako je $\lim x_n = +\infty$ i $\lim y_n = +\infty$, za niz $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ kaže se da je neodređenost tipa ∞/∞. To znači da $\lim z_n$ nije **unapred** određen, već moramo da znamo konkretne nizove. Nekoliko primera:

- Ako je $x_n = n^2$, $y_n = n$, onda je $\lim z_n = +\infty$;
- Ako je $x_n = n$, $y_n = n^2$, onda je $\lim z_n = 0$;

Neodređeni su izrazi u kojima se pojavljuju dva niza koja imaju granične vrednosti, ali se granična vrednost izraza ne može unapred predvideti.

Na primer, ako je $\lim x_n = +\infty$ i $\lim y_n = +\infty$, za niz $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ kaže se da je neodređenost tipa ∞/∞. To znači da $\lim z_n$ nije **unapred** određen, već moramo da znamo konkretne nizove. Nekoliko primera:

- Ako je $x_n = n^2$, $y_n = n$, onda je $\lim z_n = +\infty$;
- Ako je $x_n = n$, $y_n = n^2$, onda je $\lim z_n = 0$;
- Ako je $x_n = 2n + 3$, a $y_n = n + 17$, onda je $\lim z_n = 2$;

Neodređeni su izrazi u kojima se pojavljuju dva niza koja imaju granične vrednosti, ali se granična vrednost izraza ne može unapred predvideti.

Na primer, ako je $\lim x_n = +\infty$ i $\lim y_n = +\infty$, za niz $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ kaže se da je neodređenost tipa ∞/∞. To znači da $\lim z_n$ nije **unapred** određen, već moramo da znamo konkretne nizove. Nekoliko primera:

- Ako je $x_n = n^2$, $y_n = n$, onda je $\lim z_n = +\infty$;
- Ako je $x_n = n$, $y_n = n^2$, onda je $\lim z_n = 0$;
- Ako je $x_n = 2n + 3$, a $y_n = n + 17$, onda je $\lim z_n = 2$;
- Neka je za parno n, $x_n = n^2$, $y_n = n$, i za neparno n obrnuto, $x_n = n$, $y_n = n^2$. Tada niz z_n nema limes.

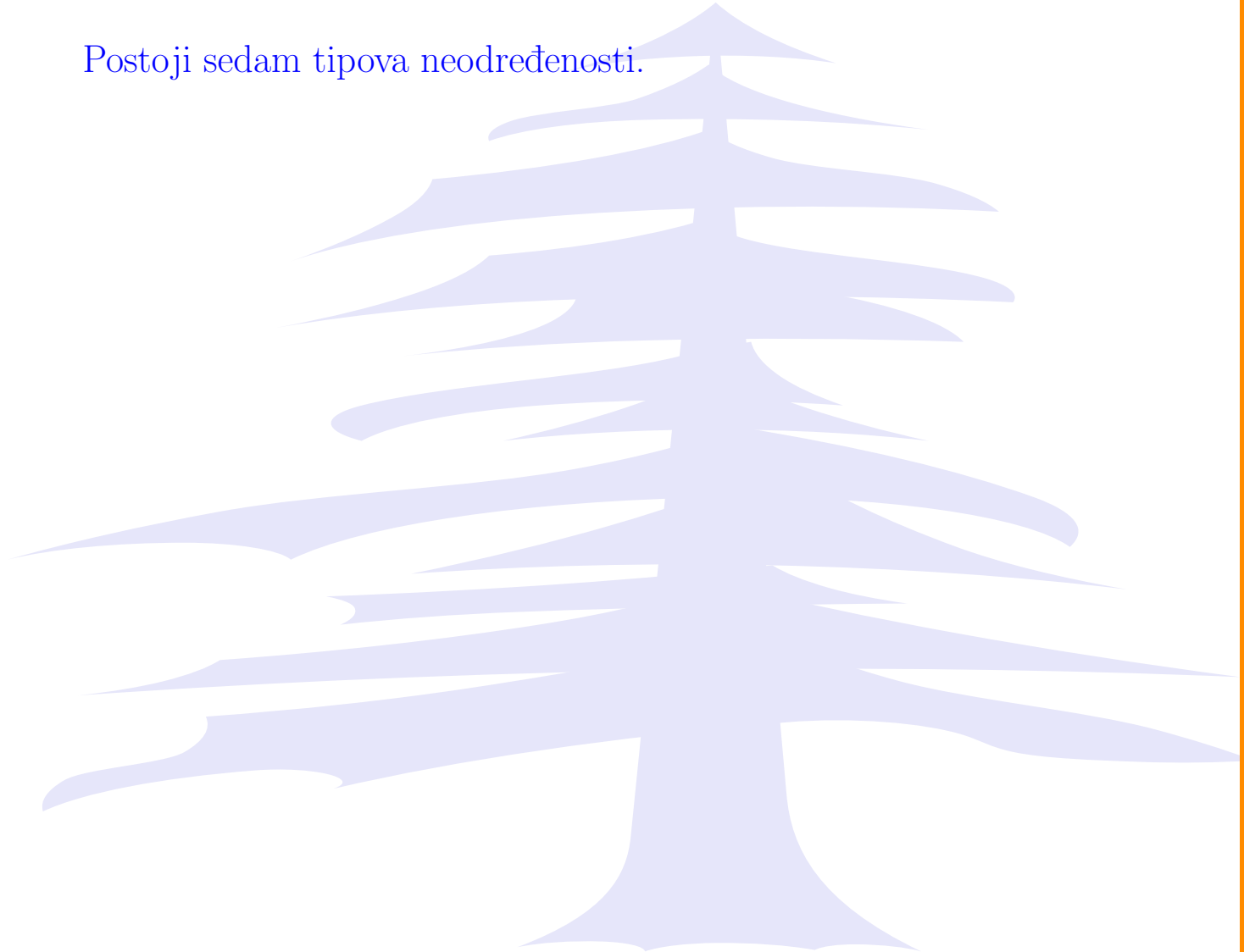
Neodređeni su izrazi u kojima se pojavljuju dva niza koja imaju granične vrednosti, ali se granična vrednost izraza ne može unapred predvideti.

Na primer, ako je $\lim x_n = +\infty$ i $\lim y_n = +\infty$, za niz $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ kaže se da je neodređenost tipa ∞/∞. To znači da $\lim z_n$ nije **unapred** određen, već moramo da znamo konkretne nizove. Nekoliko primera:

- Ako je $x_n = n^2$, $y_n = n$, onda je $\lim z_n = +\infty$;
- Ako je $x_n = n$, $y_n = n^2$, onda je $\lim z_n = 0$;
- Ako je $x_n = 2n + 3$, a $y_n = n + 17$, onda je $\lim z_n = 2$;
- Neka je za parno n, $x_n = n^2$, $y_n = n$, i za neparno n obrnuto, $x_n = n$, $y_n = n^2$. Tada niz z_n nema limes.

U svim navedenim slučajevima, nizovi x_n i y_n imaju beskonačnu graničnu vrednost, a njihov količnik se ponaša različito, od slučaja do slučaja.

Postoji sedam tipova neodređenosti.



Postoji sedam tipova neodređenosti.

Neodređeni su izrazi tipa

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

Postoji sedam tipova neodređenosti.

Neodređeni su izrazi tipa

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

Matematička analiza se upravo bavi neodređenostima, sa ciljem da se primenom određenih tehnika neodređenosti "reše". Sledeće dve teoreme služe upravo tom cilju.

Postoji sedam tipova neodređenosti.

Neodređeni su izrazi tipa

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

Matematička analiza se upravo bavi neodređenostima, sa ciljem da se primenom određenih tehnika neodređenosti "reše". Sledeće dve teoreme služe upravo tom cilju.

Teorema o dva žandara

Teorema 9 *Neka su* $\{y_n\}$ *i* $\{z_n\}$ *nizovi za koje je* $\lim y_n = \lim z_n = c$, *gde je* $c \in \overline{\mathbf{R}}$. *Ako za skoro svako* n *važe nejednakosti*

$$y_n \leq x_n \leq z_n,$$

tada i niz $\{x_n\}$ *ima graničnu vrednost i važi da je* $\lim x_n = c$.

Teorema o dva žandara

Teorema 9 *Neka su* $\{y_n\}$ *i* $\{z_n\}$ *nizovi za koje je* $\lim y_n = \lim z_n = c$, *gde je* $c \in \overline{\mathbf{R}}$. *Ako za skoro svako* n *važe nejednakosti*

$$y_n \leq x_n \leq z_n,$$

tada i niz $\{x_n\}$ *ima graničnu vrednost i važi da je* $\lim x_n = c$.

Ilustracija dokaza teoreme o dva žandara:

Primer: $x_n = \dfrac{\log(1+n)}{1+n^2}$.

Primer: $x_n = \dfrac{\log(1+n)}{1+n^2}$.

- Koristimo $\log(1+n) < n$ za svako $n \in \mathbf{N}$ (dokaz?)

Primer: $x_n = \dfrac{\log(1+n)}{1+n^2}$.

- Koristimo $\log(1+n) < n$ za svako $n \in \mathbf{N}$ (dokaz?)
- $0 \leq \dfrac{\log(1+n)}{1+n^2} \leq \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$

Primer: $x_n = \dfrac{\log(1+n)}{1+n^2}$.

- Koristimo $\log(1+n) < n$ za svako $n \in \mathbf{N}$ (dokaz?)
- $0 \leq \dfrac{\log(1+n)}{1+n^2} \leq \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$
- Kako je $\lim 1/n = 0$, zaključujemo, prema teoremi 9, da je i $\lim x_n = 0$.

Za $a, b > 0$ naći $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

Za $a, b > 0$ naći $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

Neka je $a \leq b$. Tada je

$$b^n \leq a^n + b^n \leq 2b^n, \quad \text{odakle je} \quad b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq 2^{1/n} b.$$

Kako je $\lim 2^{1/n} = 1$, imamo da je $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = b = \max(a, b)$.

Stolzova teorema

Teorema 10 *Neka su ispunjeni uslovi:*

Stolzova teorema

Teorema 10 *Neka su ispunjeni uslovi:*

1. $\lim y_n = +\infty$,

Stolzova teorema

Teorema 10 *Neka su ispunjeni uslovi:*

1. $\lim y_n = +\infty$,
2. *niz* $\{y_n\}$ *je monotono rastući, tj.* $y_{n+1} > y_n$ *za skoro svako* n,

Stolzova teorema

Teorema 10 *Neka su ispunjeni uslovi:*

1. $\lim y_n = +\infty$,
2. *niz* $\{y_n\}$ *je monotono rastući, tj.* $y_{n+1} > y_n$ *za skoro svako* n,
3. *postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost* $\lim \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, *gde je* $\{x_n\}$ *proizvoljan niz.*

Stolzova teorema

Teorema 10 *Neka su ispunjeni uslovi:*

1. $\lim y_n = +\infty$,
2. *niz* $\{y_n\}$ *je monotono rastući, tj.* $y_{n+1} > y_n$ *za skoro svako* n,
3. *postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost* $\lim \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, *gde je* $\{x_n\}$ *proizvoljan niz.*

Tada postoji i $\lim x_n/y_n$ *i važi jednakost*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Stolzova teorema

Teorema 10 *Neka su ispunjeni uslovi:*

1. $\lim y_n = +\infty$,
2. *niz* $\{y_n\}$ *je monotono rastući, tj.* $y_{n+1} > y_n$ *za skoro svako* n,
3. *postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost* $\lim \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, *gde je* $\{x_n\}$ *proizvoljan niz.*

Tada postoji i $\lim x_n/y_n$ *i važi jednakost*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Ova teorema se primenjuje kod limesa tipa ∞/∞.

Stolzova teorema

Teorema 10 *Neka su ispunjeni uslovi:*

1. $\lim y_n = +\infty$,
2. *niz* $\{y_n\}$ *je monotono rastući, tj.* $y_{n+1} > y_n$ *za skoro svako* n,
3. *postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost* $\lim \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, *gde je* $\{x_n\}$ *proizvoljan niz.*

Tada postoji i $\lim x_n/y_n$ *i važi jednakost*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Ova teorema se primenjuje kod limesa tipa ∞/∞.
Često je lakše naći $\lim(x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n)$ nego $\lim x_n/y_n$.

Stolzova teorema

Teorema 10 *Neka su ispunjeni uslovi:*

1. $\lim y_n = +\infty$,
2. *niz* $\{y_n\}$ *je monotono rastući, tj.* $y_{n+1} > y_n$ *za skoro svako* n,
3. *postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost* $\lim \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, *gde je* $\{x_n\}$ *proizvoljan niz.*

Tada postoji i $\lim x_n/y_n$ *i važi jednakost*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Ova teorema se primenjuje kod limesa tipa ∞/∞.
Često je lakše naći $\lim(x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n)$ nego $\lim x_n/y_n$.

Primer 1:

$$\lim \frac{n}{2^n} = \lim \frac{n+1-n}{2^{n+1}-2^n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0.$$

Primer 1:

$$\lim \frac{n}{2^n} = \lim \frac{n+1-n}{2^{n+1}-2^n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0.$$

Da li su ispunjeni uslovi?

Primer 1:

$$\lim \frac{n}{2^n} = \lim \frac{n+1-n}{2^{n+1}-2^n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0.$$

Da li su ispunjeni uslovi?

Primer 2: Ako je $\lim x_n = a$, dokazati da niz aritmetičkih sredina

$$a_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

ima istu graničnu vrednost a.

Primer 1:

$$\lim \frac{n}{2^n} = \lim \frac{n+1-n}{2^{n+1}-2^n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0.$$

Da li su ispunjeni uslovi?

Primer 2: Ako je $\lim x_n = a$, dokazati da niz aritmetičkih sredina

$$a_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

ima istu graničnu vrednost a.

Monotoni nizovi

Definicija 1 Niz $\{x_n\}$ je (monotono)

- **rastući** ako je $x_{n+1} > x_n$ za skoro svako n;

Monotoni nizovi

Definicija 1 Niz $\{x_n\}$ je (monotono)

- **rastući** ako je $x_{n+1} > x_n$ za skoro svako n;
- **opadajući** ako je $x_{n+1} < x_n$ za skoro svako n;

Monotoni nizovi

Definicija 1 Niz $\{x_n\}$ je (monotono)

- **rastući** ako je $x_{n+1} > x_n$ za skoro svako n;
- **opadajući** ako je $x_{n+1} < x_n$ za skoro svako n;
- **neopadajući** ako je $x_{n+1} \geq x_n$ za skoro svako n;

Monotoni nizovi

Definicija 1 Niz $\{x_n\}$ je (monotono)

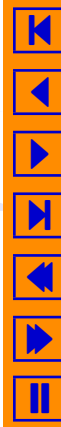
- **rastući** ako je $x_{n+1} > x_n$ za skoro svako n;
- **opadajući** ako je $x_{n+1} < x_n$ za skoro svako n;
- **neopadajući** ako je $x_{n+1} \geq x_n$ za skoro svako n;
- **nerastući** ako je $x_{n+1} \leq x_n$ za skoro svako n.

Monotoni nizovi

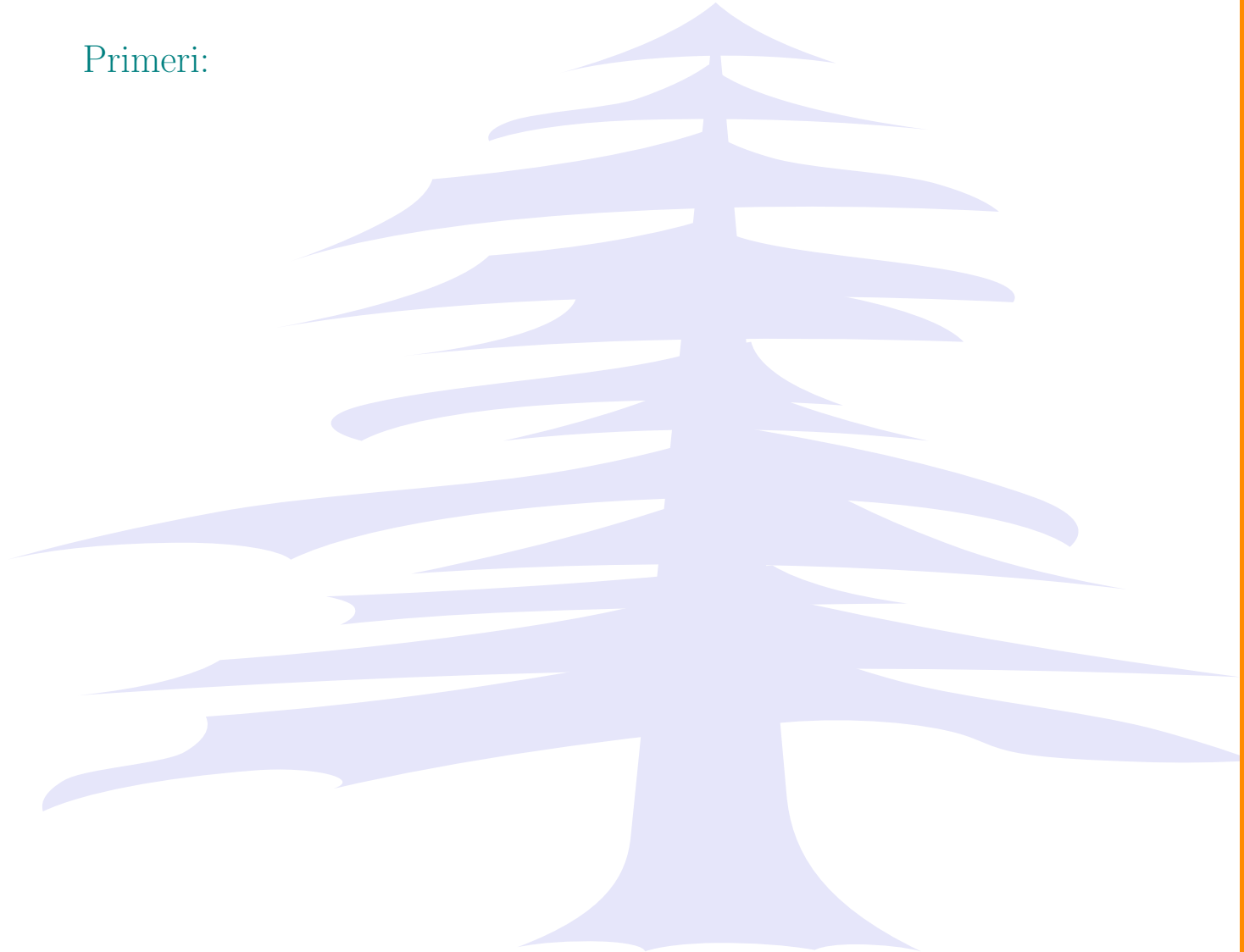
Definicija 1 Niz $\{x_n\}$ je (monotono)

- **rastući** ako je $x_{n+1} > x_n$ za skoro svako n;
- **opadajući** ako je $x_{n+1} < x_n$ za skoro svako n;
- **neopadajući** ako je $x_{n+1} \geq x_n$ za skoro svako n;
- **nerastući** ako je $x_{n+1} \leq x_n$ za skoro svako n.

Za niz koji ima jednu od navedenih osobina kaže se da je **monoton niz**.



Primeri:



Primeri:

- Niz $x_n = n^2$ je monotono rastući;

Primeri:

- Niz $x_n = n^2$ je monotono rastući;
- Niz $x_n = 1/n$ je monotono opadajući;

Primeri:

- Niz $x_n = n^2$ je monotono rastući;
- Niz $x_n = 1/n$ je monotono opadajući;
- Niz $x_n = [\log n]$ je monotono neopadajući;

Primeri:

- Niz $x_n = n^2$ je monotono rastući;
- Niz $x_n = 1/n$ je monotono opadajući;
- Niz $x_n = [\log n]$ je monotono neopadajući;
- Niz $x_n = \frac{n-3}{n^2}$ je monotono opadajući i važi da je $x_{n+1} < x_n$ za $n \geq 6$;

Primeri:

- Niz $x_n = n^2$ je monotono rastući;
- Niz $x_n = 1/n$ je monotono opadajući;
- Niz $x_n = [\log n]$ je monotono neopadajući;
- Niz $x_n = \frac{n-3}{n^2}$ je monotono opadajući i važi da je $x_{n+1} < x_n$ za $n \geq 6$;
- Niz $x_n = \sin n$ nije monotoni.

Teorema 1

- *Svaki monoton niz ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost.*

Teorema 1

- *Svaki monoton niz ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost.*
- *Ako je niz* $\{x_n\}$ *monotono neopadajući, tada je* $\lim x_n = \sup x_n$*; za monotono nerastući niz važi da je* $\lim x_n = \inf x_n$.

Teorema 1

- *Svaki monoton niz ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost.*
- *Ako je niz* $\{x_n\}$ *monotono neopadajući, tada je* $\lim x_n = \sup x_n$*; za monotono nerastući niz važi da je* $\lim x_n = \inf x_n$*.*
- *Monoton i ograničen niz je konvergentan, tj. ima konačnu graničnu vrednost.*

Teorema 1

- *Svaki monoton niz ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost.*
- *Ako je niz* $\{x_n\}$ *monotono neopadajući, tada je* $\lim x_n = \sup x_n$*; za monotono nerastući niz važi da je* $\lim x_n = \inf x_n$*.*
- *Monoton i ograničen niz je konvergentan, tj. ima konačnu graničnu vrednost.*

Dokaz: monotono neopadajući niz $\{x_n\}$

Dokaz: monotono neopadajući niz $\{x_n\}$

- Prvi slučaj: ograničen niz.

Dokaz: monotono neopadajući niz $\{x_n\}$

- Prvi slučaj: ograničen niz.

  Tada je $\sup x_n = c \in \mathbf{R}$ (konačan je)

Dokaz: monotono neopadajući niz $\{x_n\}$

- Prvi slučaj: ograničen niz.

  Tada je $\sup x_n = c \in \mathbf{R}$ (konačan je)

  Supremum je najmanja gornja granica + neopadanje niza $\Longrightarrow$ $\lim x_n = c$.

Dokaz: monotono neopadajući niz $\{x_n\}$

- Prvi slučaj: ograničen niz.

  Tada je $\sup x_n = c \in \mathbf{R}$ (konačan je)

  Supremum je najmanja gornja granica + neopadanje niza $\Longrightarrow$ $\lim x_n = c$.

- Drugi slučaj: neograničen niz

Dokaz: monotono neopadajući niz $\{x_n\}$

- Prvi slučaj: ograničen niz.

  Tada je $\sup x_n = c \in \mathbf{R}$ (konačan je)

  Supremum je najmanja gornja granica + neopadanje niza $\Longrightarrow$ $\lim x_n = c$.

- Drugi slučaj: neograničen niz

  Tada je $\sup x_n = +\infty$

Dokaz: monotono neopadajući niz $\{x_n\}$

- Prvi slučaj: ograničen niz.

  Tada je $\sup x_n = c \in \mathbf{R}$ (konačan je)

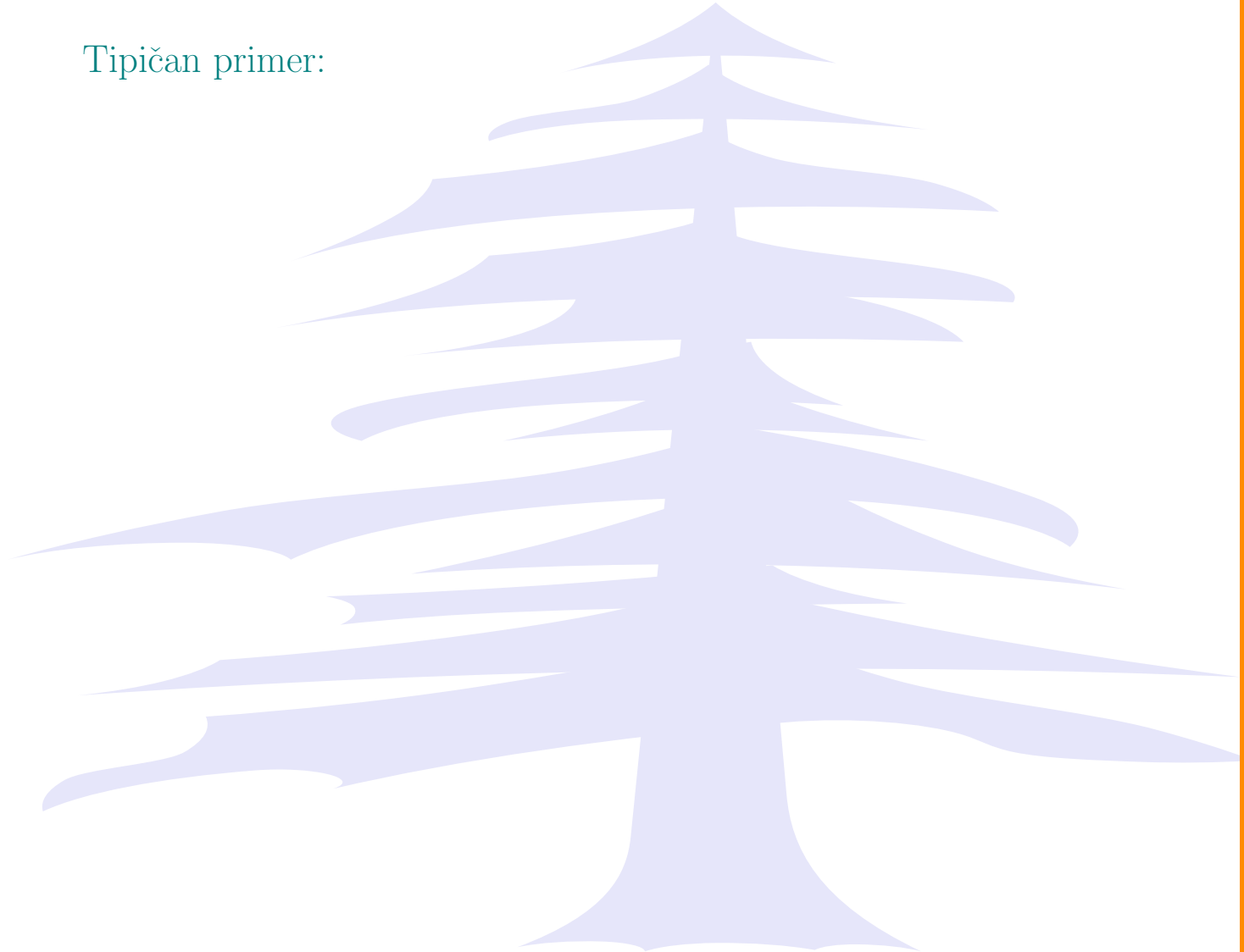
  Supremum je najmanja gornja granica + neopadanje niza $\Longrightarrow$ $\lim x_n = c$.

- Drugi slučaj: neograničen niz

  Tada je $\sup x_n = +\infty$

  Neograničen + neopadajući $\Longrightarrow$ $\lim x_n = +\infty$

Tipičan primer:



Tipičan primer:
Niz $\{x_n\}$ definisan je pomoću rekurentne formule

$$(1) \qquad x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ispitati da li je niz konvergentan i ako jeste, naći $\lim x_n$.
Jedan način rešavanja ovog tipa problema:

Tipičan primer:
Niz $\{x_n\}$ definisan je pomoću rekurentne formule

$$(1) \qquad x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ispitati da li je niz konvergentan i ako jeste, naći $\lim x_n$.
Jedan način rešavanja ovog tipa problema:

1. Dokazati da je niz $\{x_n\}$ monoton i ograničen.

Tipičan primer:
Niz $\{x_n\}$ definisan je pomoću rekurentne formule

$$(1) \qquad x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ispitati da li je niz konvergentan i ako jeste, naći $\lim x_n$.
Jedan način rešavanja ovog tipa problema:

1. Dokazati da je niz $\{x_n\}$ monoton i ograničen.
2. Iz dokazane teoreme izlazi da je $\lim x_n = c$, i da je c realan broj.

Tipičan primer:
Niz $\{x_n\}$ definisan je pomoću rekurentne formule

$$(1) \qquad x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ispitati da li je niz konvergentan i ako jeste, naći $\lim x_n$.
Jedan način rešavanja ovog tipa problema:

1. Dokazati da je niz $\{x_n\}$ monoton i ograničen.
2. Iz dokazane teoreme izlazi da je $\lim x_n = c$, i da je c realan broj.
3. Ako se u rekurentnoj formuli (1) pusti da $n \to +\infty$, dobija se

$$c = \frac{5c + 4}{4c + 5}$$

Tipičan primer:
Niz $\{x_n\}$ definisan je pomoću rekurentne formule

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

Ispitati da li je niz konvergentan i ako jeste, naći $\lim x_n$.
Jedan način rešavanja ovog tipa problema:

1. Dokazati da je niz $\{x_n\}$ monoton i ograničen.
2. Iz dokazane teoreme izlazi da je $\lim x_n = c$, i da je c realan broj.
3. Ako se u rekurentnoj formuli (1) pusti da $n \to +\infty$, dobija se
$$c = \frac{5c + 4}{4c + 5}$$
4. Broj c, limes niza, dobija se rešavanjem prethodne jednačine. Ako ona ima više rešenja, do ispravnog rešenja se dolazi eliminacijom nemogućih rešenja.

Zašto su potrebni koraci 1 i 2? Zar ne možemo odmah da pretpostavimo da je $\lim x_n = c$, pa da primenimo korake 3-4?

Zašto su potrebni koraci 1 i 2? Zar ne možemo odmah da pretpostavimo da je $\lim x_n = c$, pa da primenimo korake 3-4?

Primer: Neka je niz $\{x_n\}$ definisan sa

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = 2 - x_n.$$

Nije teško pokazati da su članovi niza naizmenično 0 i 2, pa on nema graničnu vrednost. Ali ako bez provere pretpostavimo da ona postoji i da je jednaka c, iz definicione relacije nalalazimo da je $c = 2 - c$, odnosno $c = 1$.

Važno: Niz ne mora biti monoton da bi bio konvergentan.

Važno: Niz ne mora biti monoton da bi bio konvergentan.

Primer: Niz $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ nije monoton, ali je $\lim x_n = 0$

Važno: Niz ne mora biti monoton da bi bio konvergentan.

Primer: Niz $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ nije monoton, ali je $\lim x_n = 0$

Metod koji je pokazan je stoga samo jedan od mogućih načina da se dokaže konvergencija niza.

Broj e

Broj e se definiše kao granična vrednost (tipa 1^∞):

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Broj e

Broj e se definiše kao granična vrednost (tipa 1^∞):

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Ova granična vrednost postoji, jer je niz $x_n = (1 + 1/n)^n$ monotono rastući i ograničen (sledi dokaz).

Niz $x_n = (1 + 1/n)^n$ *je monotono rastući i ograničen.*

Niz $x_n = (1 + 1/n)^n$ *je monotono rastući i ograničen.*

Dokaz:

Niz $x_n = (1 + 1/n)^n$ je monotono rastući i ograničen.

Dokaz:

- $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+2}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$

Niz $x_n = (1 + 1/n)^n$ je monotono rastući i ograničen.

Dokaz:

- $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+2}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$
- Potsetimo se: $(1+x)^n > 1 + nx$. (BERNOULLIjeva nejednakost, važi za $x > -1$, $x \neq 0$ i $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$).

Niz $x_n = (1+1/n)^n$ je monotono rastući i ograničen.

Dokaz:

- $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+2}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$
- Potsetimo se: $(1+x)^n > 1+nx$. (BERNOULLIjeva nejednakost, važi za $x > -1$, $x \neq 0$ i $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$).
- Odavde je $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ za $n \geq 2$, pa je niz $\{x_n\}$ monotono rastući.

Niz $x_n = (1 + 1/n)^n$ je monotono rastući i ograničen.

Dokaz:

- $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+2}{n+1}\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$
- Potsetimo se: $(1+x)^n > 1 + nx$. (BERNOULLIjeva nejednakost, važi za $x > -1$, $x \neq 0$ i $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$).
- Odavde je $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ za $n \geq 2$, pa je niz $\{x_n\}$ monotono rastući.
- Ograničenost se dobija iz binomnog razvoja.

Mogućnost izračunavanja broja e:

$$e \approx x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \text{za veliko } n$$

Mogućnost izračunavanja broja e:

$$e \approx x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \textit{za veliko } n$$

Spora konvergencija niza x_n čini ovaj postupak skoro neprimenljivim:

$$x_1 = 2, \quad x_{20} = 2.65330, \quad x_{100} = 2.70481, \quad x_{200} = 2.71152$$

Mogućnost izračunavanja broja e:

$$e \approx x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \textit{za veliko } n$$

Spora konvergencija niza x_n čini ovaj postupak skoro neprimenljivim:

$$x_1 = 2, \quad x_{20} = 2.65330, \quad x_{100} = 2.70481, \quad x_{200} = 2.71152$$

Vrednost broja e izračunata tačnijom metodom na 30 decimala je:

$$e \approx 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353$$

Alternativno, broj e se može izračunati koristeći činjenicu

$$\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=e.$$

Alternativno, broj e se može izračunati koristeći činjenicu

$$\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=e.$$

Dokaz odlažemo za kasnije.

Alternativno, broj e se može izračunati koristeći činjenicu

$$\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=e.$$

Dokaz odlažemo za kasnije.

Numerički rezultati:

$y_1 = 2, \quad y_{10} = 2.71828\ 18011, \quad y_{20} = 2.71828\ 18284\ 59045\ 2353397,$

$$y_{30} = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353$$

Za proizvoljan realan broj x važi da je

$$\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{1}$$

Za proizvoljan realan broj x važi da je

$$\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{1}$$

Dokaz odlažemo za kasnije.

Za proizvoljan realan broj x važi da je

$$\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{1}$$

Dokaz odlažemo za kasnije.

Ova činjenica omogućava da se strogo definiše eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$, i ujedno daje postupak za njeno izračunavanje.

Za proizvoljan realan broj x važi da je

$$\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{1}$$

Dokaz odlažemo za kasnije.

Ova činjenica omogućava da se strogo definiše eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$, i ujedno daje postupak za njeno izračunavanje.

Osim toga, iz (1) može se videti kako se broj e **prirodno** pojavljuje u raznim oblastima primene matematike.

Za proizvoljan realan broj x važi da je

$$\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x. \tag{1}$$

Dokaz odlažemo za kasnije.

Ova činjenica omogućava da se strogo definiše eksponencijalna funkcija $x \mapsto e^x$, i ujedno daje postupak za njeno izračunavanje.

Osim toga, iz (1) može se videti kako se broj e **prirodno** pojavljuje u raznim oblastima primene matematike.

Primer iz finansija: Pretpostavimo da je kamatna stopa u banci na godišnjem nivou jednaka r i da se kamaćenje vrši svakog meseca. Ako je početna suma bila u, onda ćemo imati:

Primer iz finansija: Pretpostavimo da je kamatna stopa u banci na godišnjem nivou jednaka r i da se kamaćenje vrši svakog meseca. Ako je početna suma bila u, onda ćemo imati:

- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)$ posle prvog meseca;

Primer iz finansija: Pretpostavimo da je kamatna stopa u banci na godišnjem nivou jednaka r i da se kamaćenje vrši svakog meseca. Ako je početna suma bila u, onda ćemo imati:

- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)$ posle prvog meseca;
- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^2$ posle drugog meseca;

Primer iz finansija: Pretpostavimo da je kamatna stopa u banci na godišnjem nivou jednaka r i da se kamaćenje vrši svakog meseca. Ako je početna suma bila u, onda ćemo imati:

- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)$ posle prvog meseca;
- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^2$ posle drugog meseca;
- ...

Primer iz finansija: Pretpostavimo da je kamatna stopa u banci na godišnjem nivou jednaka r i da se kamaćenje vrši svakog meseca. Ako je početna suma bila u, onda ćemo imati:

- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)$ posle prvog meseca;
- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^2$ posle drugog meseca;
- ...
- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$ posle godine dana.

Primer iz finansija: Pretpostavimo da je kamatna stopa u banci na godišnjem nivou jednaka r i da se kamaćenje vrši svakog meseca. Ako je početna suma bila u, onda ćemo imati:

- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)$ posle prvog meseca;
- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^2$ posle drugog meseca;
- ...
- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$ posle godine dana.

Kamaćenje može da se vrši i u kraćim intervalima od mesec dana. Ako imamo ukupno n kamaćenja godišnje, tada se posle godine dana dobija suma od

$$u \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \approx u \cdot e^r,$$

Primer iz finansija: Pretpostavimo da je kamatna stopa u banci na godišnjem nivou jednaka r i da se kamaćenje vrši svakog meseca. Ako je početna suma bila u, onda ćemo imati:

- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)$ posle prvog meseca;
- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^2$ posle drugog meseca;
- ...
- $u \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$ posle godine dana.

Kamaćenje može da se vrši i u kraćim intervalima od mesec dana. Ako imamo ukupno n kamaćenja godišnje, tada se posle godine dana dobija suma od

$$u \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \approx u \cdot e^r,$$

a posle nekog vremena t (ako se za jedinicu vremena uzme godina), dobija se

$$u \cdot \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n \approx u \cdot e^{rt}$$

(granični slučaj neprekdnog kamaćenja).

Umetnuti intervali

Definicija 2 Neka su dati realni nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ takvi da je

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 \quad \text{i} \quad \lim (b_n - a_n) = 0.$$

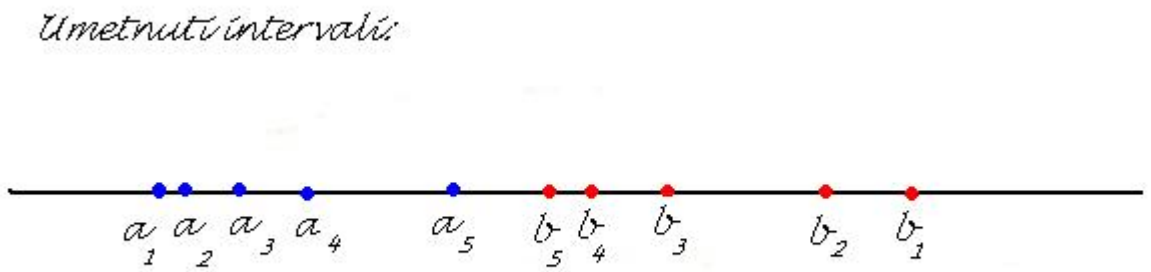
Familija zatvorenih intervala $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ čije su krajnje tačke elementi nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ naziva se **familijom umetnutih intervala**.

Umetnuti intervali

Definicija 2 Neka su dati realni nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ takvi da je

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 \quad \text{i} \quad \lim (b_n - a_n) = 0.$$

Familija zatvorenih intervala $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ čije su krajnje tačke elementi nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ naziva se **familijom umetnutih intervala**.



Teorema 2 *Svaka familija umetnutih intervala ima jednu i samo jednu zajedničku tačku.*

Teorema 2 *Svaka familija umetnutih intervala ima jednu i samo jednu zajedničku tačku.*

Dokaz:

- Ima jednu zajedničku tačku, jer nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ imaju istu graničnu vrednost c.

Teorema 2 *Svaka familija umetnutih intervala ima jednu i samo jednu zajedničku tačku.*

Dokaz:

- Ima jednu zajedničku tačku, jer nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ imaju istu graničnu vrednost c.
- Ako bi postojala još jedna tačka koja je zajednička za sve intervale, ona bi morala da bude veća od c i manja od c (apsurd!)

Podnizovi

Definicija 1 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ **monotono rastući** niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je $\{x_{n_k}\}$ **podniz** niza $\{x_n\}$.

Podnizovi

Definicija 1 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ **monotono rastući** niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je $\{x_{n_k}\}$ **podniz** niza $\{x_n\}$.

Tipični primeri:

Podnizovi

Definicija 1 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ **monotono rastući** niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je $\{x_{n_k}\}$ **podniz** niza $\{x_n\}$.

Tipični primeri:

- Podniz sa neparnim indeksima, $x_{n_k} = x_{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Podnizovi

Definicija 1 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ **monotono rastući** niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je $\{x_{n_k}\}$ **podniz** niza $\{x_n\}$.

Tipični primeri:

- Podniz sa neparnim indeksima, $x_{n_k} = x_{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$.
- Podniz sa parnim indeksima, $x_{n_k} = x_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$,

Podnizovi

Definicija 1 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ **monotono rastući** niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je $\{x_{n_k}\}$ **podniz** niza $\{x_n\}$.

Tipični primeri:

- Podniz sa neparnim indeksima, $x_{n_k} = x_{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$.
- Podniz sa parnim indeksima, $x_{n_k} = x_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$,
- Podniz od elemenata na svakom trećem mestu počevši od prvog: $x_{n_k} = x_{3k-2}$, $k = 1, 2, \ldots$

Podnizovi

Definicija 1 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ **monotono rastući** niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je $\{x_{n_k}\}$ **podniz** niza $\{x_n\}$.

Tipični primeri:

- Podniz sa neparnim indeksima, $x_{n_k} = x_{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$.
- Podniz sa parnim indeksima, $x_{n_k} = x_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$,
- Podniz od elemenata na svakom trećem mestu počevši od prvog: $x_{n_k} = x_{3k-2}$, $k = 1, 2, \ldots$

Svaki niz je sam sebi podniz. Nizovi čiji su svi članovi međusobno različiti imaju uvek beskonačno mnogo podnizova.

Teorema 1 *Niz* $\{x_n\}$ *ima graničnu vrednost* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *ako i samo ako svaki njegov podniz ima graničnu vrednost* a.

Teorema 2 *Ako se niz* $\{x_n\}$ *može predstaviti kao unija* m *svojih podnizova i ako svaki od njih ima graničnu vrednost* a*, tada je i* $\lim x_n = a$.

Teorema 2 *Ako se niz* $\{x_n\}$ *može predstaviti kao unija* m *svojih podnizova i ako svaki od njih ima graničnu vrednost* a*, tada je i* $\lim x_n = a$.

Najčešće imamo dva podniza (npr, sa parnim i sa neparnim indeksima); ako ustanovimo da oba imaju isti limes, onda je i limes celog niza isti.

Teorema 3 *Ako je niz* $\{x_n\}$ *monoton i ako jedan njegov podniz ima graničnu vrednost* $a \in \overline{\mathbf{R}}$, *tada je* $\lim x_n = a$.

Teorema 3 *Ako je niz* $\{x_n\}$ *monoton i ako jedan njegov podniz ima graničnu vrednost* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *, tada je* $\lim x_n = a$.

Ideja dokaza: monoton niz ima graničnu vrednost

Teorema 3 *Ako je niz* $\{x_n\}$ *monoton i ako jedan njegov podniz ima graničnu vrednost* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *, tada je* $\lim x_n = a$.

Ideja dokaza: monoton niz ima graničnu vrednost

Zaključak: Niz je konvergentan ako i samo ako:

Teorema 3 *Ako je niz* $\{x_n\}$ *monoton i ako jedan njegov podniz ima graničnu vrednost* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *, tada je* $\lim x_n = a$.

Ideja dokaza: monoton niz ima graničnu vrednost

Zaključak: Niz je konvergentan ako i samo ako:

- **Svi podnizovi konvergiraju ka** a**;**

Teorema 3 *Ako je niz* $\{x_n\}$ *monoton i ako jedan njegov podniz ima graničnu vrednost* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *, tada je* $\lim x_n = a$.

Ideja dokaza: monoton niz ima graničnu vrednost

Zaključak: Niz je konvergentan ako i samo ako:

- **Svi podnizovi konvergiraju ka** a**;**
- **Dva podniza konvergiraju ka** a **(parni i neparni)**

Teorema 3 *Ako je niz* $\{x_n\}$ *monoton i ako jedan njegov podniz ima graničnu vrednost* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *, tada je* $\lim x_n = a$.

Ideja dokaza: monoton niz ima graničnu vrednost

Zaključak: Niz je konvergentan ako i samo ako:

- **Svi podnizovi konvergiraju ka** a**;**
- **Dva podniza konvergiraju ka** a **(parni i neparni)**
- **Jedan podniz konvergira ka** a **(samo za monotone nizove)**

Teorema 4 Bolzano-Weierstrassov stav. *Svaki ograničen niz ima (bar jedan) konvergentan podniz.*

Teorema 4 Bolzano-Weierstrassov stav. *Svaki ograničen niz ima (bar jedan) konvergentan podniz.*

Sastojci dokaza:

- Slučaj kada niz ima samo konačno mnogo međusobno različitih elemenata - lak slučaj.

Teorema 4 Bolzano-Weierstrassov stav. *Svaki ograničen niz ima (bar jedan) konvergentan podniz.*

Sastojci dokaza:

- Slučaj kada niz ima samo konačno mnogo međusobno različitih elemenata - lak slučaj.
- Slučaj kada ih ima beskonačno mnogo:

Teorema 4 Bolzano-Weierstrassov stav. *Svaki ograničen niz ima (bar jedan) konvergentan podniz.*

Sastojci dokaza:

- Slučaj kada niz ima samo konačno mnogo međusobno različitih elemenata - lak slučaj.
- Slučaj kada ih ima beskonačno mnogo:

  svi članovi niza su u nekom intervalu $[a, b]$ (zbog ograničenosti)

Teorema 4 Bolzano-Weierstrassov stav. *Svaki ograničen niz ima (bar jedan) konvergentan podniz.*

Sastojci dokaza:

- Slučaj kada niz ima samo konačno mnogo međusobno različitih elemenata - lak slučaj.
- Slučaj kada ih ima beskonačno mnogo:

  svi članovi niza su u nekom intervalu $[a, b]$ (zbog ograničenosti)

  Ako je c sredina intervala, onda $[a, c]$ ili $c, b]$ mora da sadrži beskonačno mnogo članova niza.

Teorema 4 Bolzano-Weierstrassov stav. *Svaki ograničen niz ima (bar jedan) konvergentan podniz.*

Sastojci dokaza:

- Slučaj kada niz ima samo konačno mnogo međusobno različitih elemenata - lak slučaj.
- Slučaj kada ih ima beskonačno mnogo:

  svi članovi niza su u nekom intervalu $[a, b]$ (zbog ograničenosti)

  Ako je c sredina intervala, onda $[a, c]$ ili $c, b]$ mora da sadrži beskonačno mnogo članova niza.

  Teorema o umetnutim intervalima

Teorema 4 Bolzano-Weierstrassov stav. *Svaki ograničen niz ima (bar jedan) konvergentan podniz.*

Sastojci dokaza:

- Slučaj kada niz ima samo konačno mnogo međusobno različitih elemenata - lak slučaj.
- Slučaj kada ih ima beskonačno mnogo:

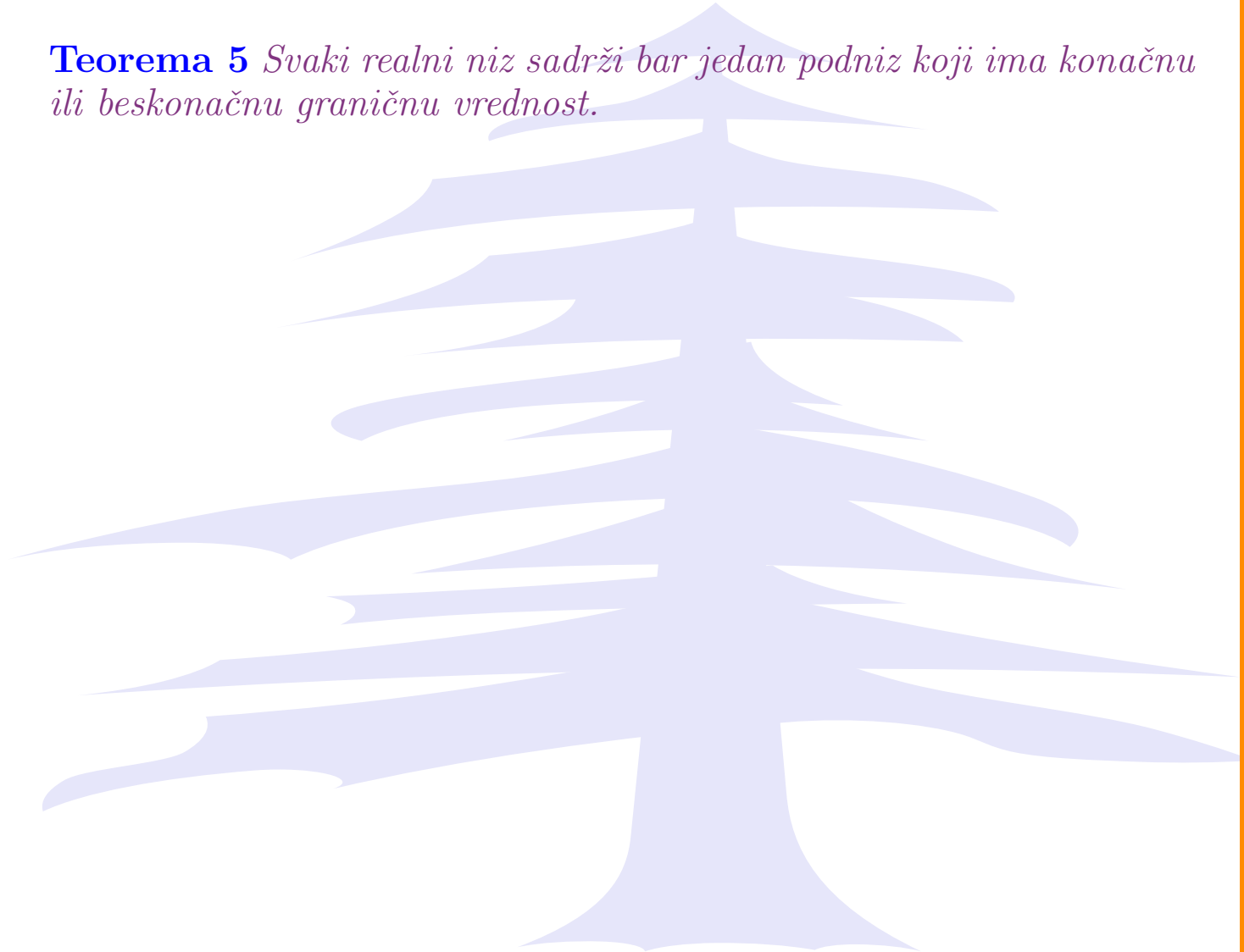
  svi članovi niza su u nekom intervalu $[a, b]$ (zbog ograničenosti)

  Ako je c sredina intervala, onda $[a, c]$ ili $c, b]$ mora da sadrži beskonačno mnogo članova niza.

  Teorema o umetnutim intervalima

Dokaz je konstruktivan: daje način da se "konstruiše" jedan takav konvergentan podniz

Teorema 5 *Svaki realni niz sadrži bar jedan podniz koji ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost.*



Teorema 6 *Ako je niz* $\{x_n\}$ *neodređeno divergentan, onda on sadrži bar dva podniza koja imaju granične vrednosti, ali su one različite.*

Teorema 6 *Ako je niz* $\{x_n\}$ *neodređeno divergentan, onda on sadrži bar dva podniza koja imaju granične vrednosti, ali su one različite.*

Granične vrednosti podnizova

Teorema 7 *Tačka* $a \in \mathbf{R}$ *je granična vrednost nekog podniza niza* $\{x_n\}$ *ako i samo ako se u svakoj okolini tačke* a *nalazi beskonačno mnogo članova niza.*

Granične vrednosti podnizova

Teorema 7 *Tačka $a \in \mathbf{R}$ je granična vrednost nekog podniza niza $\{x_n\}$ ako i samo ako se u svakoj okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo članova niza.*

Dokaz:

- Ako je a granična vrednost nekog podniza, onda se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi tog podniza.

Granične vrednosti podnizova

Teorema 7 *Tačka $a \in \mathbf{R}$ je granična vrednost nekog podniza niza $\{x_n\}$ ako i samo ako se u svakoj okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo članova niza.*

Dokaz:

- Ako je a granična vrednost nekog podniza, onda se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi tog podniza.
- Ako se u svakoj okolini $(a - 1/k, a + 1/k)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza x_n, moguće je za svako k naći indeks n_k (treba paziti da n_k raste!)

Definicija 2 Tačka a se zove **tačka nagomilavanja** niza x_n ako je to granična vrednost nekog podniza niza $\{x_n\}$.

Granične vrednosti podnizova

Teorema 7 *Tačka $a \in \mathbf{R}$ je granična vrednost nekog podniza niza $\{x_n\}$ ako i samo ako se u svakoj okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo članova niza.*

Dokaz:

- Ako je a granična vrednost nekog podniza, onda se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi tog podniza.
- Ako se u svakoj okolini $(a - 1/k, a + 1/k)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza x_n, moguće je za svako k naći indeks n_k (treba paziti da n_k raste!)

Definicija 2 Tačka a se zove **tačka nagomilavanja** niza x_n ako je to granična vrednost nekog podniza niza $\{x_n\}$.

Tačka nagomilavanja niza je pojam koji smo privremeno nazvali "dimes"!

Neka je G skup svih tačaka nagomilavanja datog niza $\{x_n\}$.

- *G je neprazan skup (teorema 5)*

Neka je G skup svih tačaka nagomilavanja datog niza $\{x_n\}$.

- *G je neprazan skup (teorema 5)*
- *G sadrži samo jedan element, koji je realan broj, ako i samo ako je niz $\{x_n\}$ konvergentan (teorema 1)*

Neka je G skup svih tačaka nagomilavanja datog niza $\{x_n\}$.

- *G je neprazan skup (teorema 5)*
- *G sadrži samo jedan element, koji je realan broj, ako i samo ako je niz $\{x_n\}$ konvergentan (teorema 1)*
- *G sadrži bar dva elementa ako i samo ako je niz $\{x_n\}$ neodređeno divergentan (teorema 6).*

Primeri nizova i skupa G njihovih tačaka nagomilavanja:

- Za niz $x_n = (-1)^n$, imamo da je $G = \{-1, 1\}$.

Neka je G skup svih tačaka nagomilavanja datog niza $\{x_n\}$.

- *G je neprazan skup (teorema 5)*
- *G sadrži samo jedan element, koji je realan broj, ako i samo ako je niz $\{x_n\}$ konvergentan (teorema 1)*
- *G sadrži bar dva elementa ako i samo ako je niz $\{x_n\}$ neodređeno divergentan (teorema 6).*

Primeri nizova i skupa G njihovih tačaka nagomilavanja:

- Za niz $x_n = (-1)^n$, imamo da je $G = \{-1, 1\}$.
- Za niz $x_n = 2 + (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, imamo da je $G = \{1, 3\}$

Neka je G skup svih tačaka nagomilavanja datog niza $\{x_n\}$.

- *G je neprazan skup (teorema 5)*
- *G sadrži samo jedan element, koji je realan broj, ako i samo ako je niz $\{x_n\}$ konvergentan (teorema 1)*
- *G sadrži bar dva elementa ako i samo ako je niz $\{x_n\}$ neodređeno divergentan (teorema 6).*

Primeri nizova i skupa G njihovih tačaka nagomilavanja:

- Za niz $x_n = (-1)^n$, imamo da je $G = \{-1, 1\}$.
- Za niz $x_n = 2 + (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, imamo da je $G = \{1, 3\}$
- Za niz racionalnih brojeva, skup G je $\overline{\mathbf{R}}$.

Skup svih tačaka nagomilavanja datog niza ima i minimalni i maksimalni element (nije lak dokaz- zato ga izostavljamo). Njima dajemo posebne nazive:

Skup svih tačaka nagomilavanja datog niza ima i minimalni i maksimalni element (nije lak dokaz- zato ga izostavljamo). Njima dajemo posebne nazive:

Definicija 3 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je G skup graničnih vrednosti njegovih podnizova. Najmanji element skupa G nazivamo **limes inferior** niza $\{x_n\}$ i obeležavamo sa $\underline{\lim}\, x_n$ ili sa $\liminf x_n$. Najveći element skupa G nazivamo **limes superior**, u oznaci $\overline{\lim}\, x_n$ ili $\limsup x_n$.

Skup svih tačaka nagomilavanja datog niza ima i minimalni i maksimalni element (nije lak dokaz- zato ga izostavljamo). Njima dajemo posebne nazive:

Definicija 3 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je G skup graničnih vrednosti njegovih podnizova. Najmanji element skupa G nazivamo **limes inferior** niza $\{x_n\}$ i obeležavamo sa $\underline{\lim}\, x_n$ ili sa $\lim \inf x_n$. Najveći element skupa G nazivamo **limes superior**, u oznaci $\overline{\lim}\, x_n$ ili $\lim \sup x_n$.

Limes inferior i limes superior mogu biti realni brojevi ili $\pm\infty$. Za razliku od limesa, koji ne mora postojati za svaki niz, limes superior i limes inferior uvek postoje.

Teorema 8 (i) *Niz* $\{x_n\}$ *ima graničnu vrednost* $c \in \overline{\mathbf{R}}$ *ako i samo ako je* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = c$.

Teorema 8 (i) *Niz* $\{x_n\}$ *ima graničnu vrednost* $c \in \overline{\mathbf{R}}$ *ako i samo ako je* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = c$.

(ii) *Za svako* $\varepsilon > 0$ *samo konačno mnogo članova niza* $\{x_n\}$ *može biti manje od* $\underline{\lim}\, x_n - \varepsilon$ *ili veće od* $\overline{\lim}\, x_n + \varepsilon$.

Teorema 8 (i) *Niz* $\{x_n\}$ *ima graničnu vrednost* $c \in \overline{\mathbf{R}}$ *ako i samo ako je* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = c$.

(ii) *Za svako* $\varepsilon > 0$ *samo konačno mnogo članova niza* $\{x_n\}$ *može biti manje od* $\underline{\lim}\, x_n - \varepsilon$ *ili veće od* $\overline{\lim}\, x_n + \varepsilon$.

(iii) *Niz* $\{x_n\}$ *je ograničen ako i samo ako su* $\underline{\lim}\, x_n$ *i* $\overline{\lim}\, x_n$ *konačni.*

U ovom delu smo naučili:

U ovom delu smo naučili:

- Šta je niz, kako se zadaje

U ovom delu smo naučili:

- Šta je niz, kako se zadaje
- Šta znači i kako se nalazi limes niza

U ovom delu smo naučili:

- Šta je niz, kako se zadaje
- Šta znači i kako se nalazi limes niza
- da koristimo teoremu o monotonom i ograničenom nizu

U ovom delu smo naučili:

- Šta je niz, kako se zadaje
- Šta znači i kako se nalazi limes niza
- da koristimo teoremu o monotonom i ograničenom nizu
- broj e i značaj tog broja u matematici

U ovom delu smo naučili:

- Šta je niz, kako se zadaje
- Šta znači i kako se nalazi limes niza
- da koristimo teoremu o monotonom i ograničenom nizu
- broj e i značaj tog broja u matematici
- Šta je podniz

U ovom delu smo naučili:

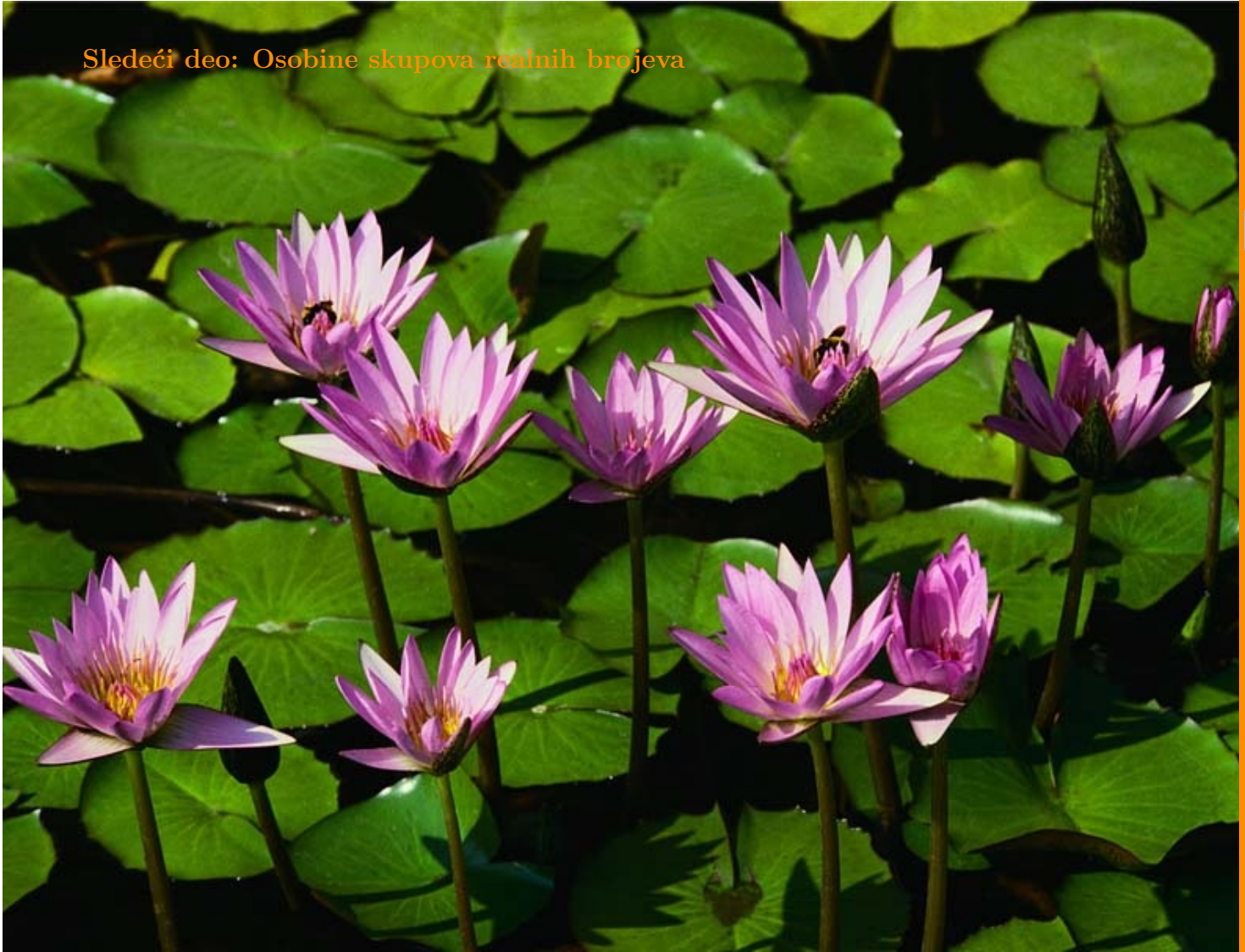
- Šta je niz, kako se zadaje
- Šta znači i kako se nalazi limes niza
- da koristimo teoremu o monotonom i ograničenom nizu
- broj e i značaj tog broja u matematici
- Šta je podniz
- Bolzano-Weierstrassov stav

U ovom delu smo naučili:

- Šta je niz, kako se zadaje
- Šta znači i kako se nalazi limes niza
- da koristimo teoremu o monotonom i ograničenom nizu
- broj e i značaj tog broja u matematici
- Šta je podniz
- Bolzano-Weierstrassov stav
- teoremu o umetnutim intervalima

U ovom delu smo naučili:

- Šta je niz, kako se zadaje
- Šta znači i kako se nalazi limes niza
- da koristimo teoremu o monotonom i ograničenom nizu
- broj e i značaj tog broja u matematici
- Šta je podniz
- Bolzano-Weierstrassov stav
- teoremu o umetnutim intervalima
- limes superior i limes inferior niza

U ovom delu smo naučili:

- Šta je niz, kako se zadaje
- Šta znači i kako se nalazi limes niza
- da koristimo teoremu o monotonom i ograničenom nizu
- broj e i značaj tog broja u matematici
- Šta je podniz
- Bolzano-Weierstrassov stav
- teoremu o umetnutim intervalima
- limes superior i limes inferior niza